Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
17.11.09
Blatt 6

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

11. Wir betrachten die Matrizengruppe $G \subset M_3(\mathbb{R})$, die aus den Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ besteht. Sie heißt Heisenberg-Gruppe.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\mathrm{Lie}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | u, v, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (b) Berechnen Sie für $A \in \mathrm{Lie}(G)$ die Matrix $\exp(A)$ und zeigen Sie, dass man durch
   $$A \mapsto \exp A$$
   einen Homöomorphismus von $\mathrm{Lie}(G)$ auf G erhält.

   (c) Bestimmen Sie das Zentrum von G.

   (d) Das Zentrum einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist definiert durch
   $$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{u \in \mathfrak{g} |\, [u, v] = 0 \,\forall\, v \in \mathfrak{g}\}$$
   Berechnen Sie das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathrm{Lie}(G)$, wenn G die Heisenberg-Gruppe ist, und zeigen Sie, dass exp eine Bijektion von $\mathfrak{z}$ auf das Zentrum von G liefert.

12. In Analysis I oder III wird gezeigt, dass es eine $C^\infty -$ Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| \geq 2$.

   (a) Benutzen Sie dies, um zu zeigen: Ist $G \subset M_n(\mathbb{R})$ eine Matrizengruppe, so ist $T_{\mathbf{1}}(G)$ die Menge aller $A'(0)$, für die gilt: Es gibt ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass A eine glatte Abbildung von I in $M_n(\mathbb{R})$ mit $A(I) \subseteq G$ und $A(0) = \mathbf{1}$ ist.

   (b) Führen Sie unter Benutzung von (a) das Beispiel 1 von § 4 der Vorlesung im Detail aus, d. h. zeigen Sie:
   $$\mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R}) \text{ und } \mathrm{Lie}(GL)(n, \mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})).$$

Abgabe: Dienstag 24.11.09 in der Vorlesung
Besprechung: Dienstag 1.12.09 in Raum 25.22-U1.33 von 13-14 Uhr