

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

13. (Diese Aufgabe wurde in der Vorlesung stillschweigend benutzt.) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist von der Form

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

mit $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar bzw. glatt, wenn f_1 und f_2 differenzierbar bzw. glatt sind, und dann ist $f'(t) := f_1'(t) + if_2'(t)$. Zeigen Sie:

- (a) Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ glatt, so ist fg glatt und

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- (b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ glatt, so ist die durch

$$g(t) = \exp(f(t))$$

definierte Funktion g glatt und $g'(t) = f'(t) \exp(f(t))$.

- (c) Verallgemeinern Sie (a) und (b) auf matrixwertige Funktionen.
14. (a) $\text{Lie}(SL(n, \mathbb{C})) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{Spur } X = 0\}$.
(b) $\exp : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ ist surjektiv.
(c) $\exp : \text{Lie}(SL(2, \mathbb{C})) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ ist nicht surjektiv.

Abgabe: Dienstag 01.12.09 in der Vorlesung

Besprechung: Dienstag 08.12.09 in Raum 25.22-U1.33 von 13-14 Uhr