Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
01.12.09
Blatt 8

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

15. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ bezeichnet man den Untervektorraum von $\mathfrak{g}$, der von den Elementen $[x, y]$ mit $x, y, \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird.

   (a) Zeigen Sie, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist.

   (b) Zeigen Sie: Ist $\dim \mathfrak{g} = 2$, so hat $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ die Dimension 0 oder 1.

   (c) Ist $\mathfrak{g}'$ eine weitere Lie-Algebra, so heißt eine Abbildung

   $$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$$

   ein *Lie-Algebren-Homomorphismus*, wenn φ linear ist und wenn für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ gilt:

   $$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

   Zeigen Sie: Ist φ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, so ist Kern (φ) ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

   (d) Zeigen Sie: Ist $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein bijektiver Lie-Algebren-Homomorphismus, so ist φ^{-1} wieder ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Man nennt dann φ einen *Lie-Algebren-Isomorphismus*.

   (e) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene Lie-Algebren der Dimension 2 gibt, nämlich die kommutative Lie-Algebra ($[x, y] = 0 \ \forall x, y$) und diejenige, die Sie aus Aufgabe 10 kennen.

Abgabe: Dienstag 08.12.09 in der Vorlesung
Besprechung: Dienstag 15.12.09 in Raum 25.22-U1.33 von 13-14 Uhr