Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
08.12.09
Blatt 9

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

16. Mit $F_n(X,Y)$ bezeichnen wir wie in der Vorlesung das homogene Lie-Polynom vom Grad n mit
$$\log(e^X e^Y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(X,Y) \in \mathbb{Q}\left\langle\left\langle X,Y \right\rangle\right\rangle .$$
Es ist also $F_1(X,Y) = X+Y, F_2(X,Y) = \frac{1}{2}\left[X,Y\right].$

    (a) Zeigen Sie, dass
    $$F_3(X,Y) = \frac{1}{12}\left[X,[X,Y]\right] - \frac{1}{12}\left[Y,[Y,X]\right].$$

    (b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
    $$F_n(X,Y) = (-1)^{n+1} F_n(Y,X).$$

17. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei N_n die Matrizengruppe, die aus allen $n \times n$-Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$
besteht. Zeigen Sie:

    (a) N_n ist eine Matrizen-Lie-Gruppe.

    (b) Lie (N_n) besteht aus den $n \times n$-Matrizen, die echte obere Dreiecksmatrizen sind.

    (c) $\exp : \mathrm{Lie}\,(N_n) \to N_n$ ist ein Diffeomorphismus.

Abgabe: Dienstag 15.12.09 in der Vorlesung