Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/2012
24.01.2012

Ergebnisse für das Extrablatt

Aufgabe 1
Nur die Menge in Aufgabenteil (b) ist ein Vektorraum.

Aufgabe 2

(a) Die Abbildung f ist $\mathbb{R}$-linear.

(b) Eine Basis von $\ker(f)$ ist
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
und eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ ist
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$
Damit ist $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 1$ und $\mathrm{rg}(f) = 3$.

(c) Für $1 \leq k < l \leq n$ sei $A(k, l)$ die Matrix, deren Eintrag an der Stelle (k, l) gleich 1 ist, an der Stelle (l, k) gleich -1 ist und bei der alle weiteren Einträge 0 sind. Dann ist $\{A(k, l)\,;\, 1 \leq k < l \leq n\}$ eine Basis von $\ker(f)$.

Für $1 \leq k < l \leq n$ sei $B(k, l)$ die Matrix, deren Einträge an den Stellen (k, l) und (l, k) gleich 1 ist und bei der alle weiteren Einträge 0 sind.
Für $1 \leq m \leq n$ sei $C(m)$ die Matrix, deren Eintrag an der Stelle (m, m) gleich 1 ist und bei der alle weiteren Einträge 0 sind.

Dann ist $\{B(k, l)\,;\, 1 \leq k < l \leq n\} \cup \{C(m)\,;\, 1 \leq m \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$. Damit ist $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\mathrm{rg}(f) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe 3

(a) $2x^3 + 3x^2 - 1 = 2p_1(x) + p_2(x) + p_4(x)$

(b) Z.B. sind $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ und $\{1, x, x^2, x^3\}$ Basen von der Hülle.

Aufgabe 4

(a) Z.B. bilden $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis der Hülle.

(b) Die Basis aus Aufgabenteil (a) kann z.B. durch $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)^t$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ ergänzt werden.

(c) Die Basen sind $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Die zusätzlichen Darstellungen sind
$$v_5 = 2v_1 + v_3; \quad v_3 = -2v_1 + v_5; \quad v_1 = -\frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_5.$$

Aufgabe 5

(1) Die Matrix ist für $k \neq 0$ invertierbar.

(2) Über den reellen Zahlen ist A für jedes $k \in (-\frac{1}{4}, \infty) \setminus \{0, 2\}$ diagonalisierbar.

Aufgabe 6

(1) Für $k = -1$ ist die Lösungsmenge von dem Gleichungssystem

$$\left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ;\, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $k \neq -1$ ist die Lösungsmenge gleich

$$\left\{ \left(\frac{k-1}{2}, 1, \frac{k-1}{2} \right) \right\}.$$

(2) Für jedes $h \notin \{0, -10\}$ und beliebiges $k \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung.

Für $h = 0$ und $k \neq 0$ gibt es keine Lösungen. Für $h = -10$ und $k \neq 0$ gibt es ebenfalls keine Lösungen.

In allen anderen Fällen, d.h. $(h, k) \in \{(0, 0), (-10, 0)\}$, gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 8

Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann ist

$$f(T) = \{f(x);\; x \in T\} \qquad (T \subset A)$$

und

$$f^{-1}(S) = \{x \in A;\; f(x) \in S\} \qquad (S \subset B).$$

(1) f ist injektiv $\Longleftrightarrow f^{-1}\big(f(T)\big) = T \quad \forall\, T \subset A$.

Beweis.

"$\Rightarrow$": Sei f injektiv und $T \subset A$. Z.z.: $f^{-1}\big(f(T)\big) = T$.

- Sei $x \in f^{-1}\big(f(T)\big)$, d.h. $f(x) \in f(T)$. Also gibt es $y \in T$ mit $f(x) = f(y)$. Da f injektiv ist, gilt $x = y \in T$. Damit ist $f^{-1}\big(f(T)\big) \subset T$ bewiesen.
- Sei $x \in T$. Dann gilt $f(x) \in f(T)$, d.h. $x \in f^{-1}\big(f(T)\big)$. Also $T \subset f^{-1}\big(f(T)\big)$. Damit $f^{-1}\big(f(T)\big) = T$.

"$\Leftarrow$": Sei $f^{-1}\big(f(T)\big) = T \;\; \forall\, T \subset A$ und seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$. Wähle $T = \{y\}$. Dann gilt $x \in f^{-1}\big(f(\{y\})\big) = \{y\}$, d.h. $x = y$. Also ist f injektiv.

(2) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow f\big(f^{-1}(S)\big) = S \quad \forall\, S \subset B.$.

Beweis.

"$\Rightarrow$": Sei f surjektiv und $S \subset B$. Z.z.: $f\big(f^{-1}(S)\big) = S$.

- Sei $x \in f\big(f^{-1}(S)\big)$, d.h. es gibt ein $y \in f^{-1}(S)$ mit $x = f(y)$. Wegen $f(y) \in S$ folgt $x \in S$. Damit gilt $f\big(f^{-1}(S)\big) \subset S$.
- Sei $x \in S$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = x$, d.h. $a \in f^{-1}(\{x\}) \subset f^{-1}(S)$. Somit gilt $x = f(a) \in f\big(f^{-1}(S)\big)$. Also $S \subset f\big(f^{-1}(S)\big)$.

"$\Leftarrow$": Können Sie das selbst beweisen?