Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
16.01.2012
Extrablatt

Extra Übungen zu Lineare Algebra I

Wichtige Information: Diejenigen Studierenden, die auf den Blättern 1-12 zwischen 86 und 96 Punkten haben, können durch die Aufgaben 9-12 dieses Blattes jeweils 5 Punkte bekommen. Diese müssen bis Mittwoch 25.01.2012, 11:00 Uhr in die Übungskästen eingeworfen werden und werden nur für diese Studierenden korrigiert.

Aufgabe 1
Welche der folgenden Mengen, ausgestattet mit den üblichen Operationen, sind Vektorräume, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Die Menge der Polynome vom Grad 4 mit reellen Koeffizienten.

(b) Die Menge der Polynome $p(x)$ mit reellen Koeffizienten und $p(7/2) = 0$.

(c) Die Menge der Polynome $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ mit reellen Koeffizienten und $\alpha_2 \geq 0$.

Aufgabe 2
Wir betrachten folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t).$$

(a) Ist f $\mathbb{R}$-linear?

(b) Finden Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$. Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f)$ und $\operatorname{rg}(f)$.

(c)* Können Sie die Ergebnisse von (a) und (b) auf den Fall

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)$$

übertragen?

Aufgabe 3
Gegeben seien die vier Polynome mit reellen Koeffizienten

$$p_1(x) = x^3 + x^2, \quad p_2(x) = x^2 - 2x - 4, \quad p_3(x) = 3x + 4, \quad p_4(x) = 2x + 3.$$

(a) Schreiben sie das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination der Polynome $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis der Hülle $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$.

Aufgabe 4
Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von der Hülle $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

(b) Ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

(c) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aus. Für jede solche Basis stellen Sie die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_5$, die nicht in dieser Basis enthalten sind, in dieser Basis dar.

Aufgabe 5
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(2) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 6

(1) Sei $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= k \\ x_1 - kx_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 &= k. \end{aligned}$$

(2) Seien $h, k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x_1 + \quad 2x_2 - \quad x_3 &= 0 \\ -x_1 + (2-h)x_2 + (2+h)x_3 &= 0 \\ -x_1 + (2+3h)x_2 - \quad 2hx_3 &= k. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, für welche h, k das Gleichungssystem keine Lösung besitzt und für welche es genau eine Lösung gibt.

Aufgabe 7*
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

für reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie, dass

$$\det(A_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Diese Determinante wird auch die *Vandermonde-Determinante* genannt.

Aufgabe 8
Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen diesen Mengen. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(1) f ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1}\big(f(T)\big) = T$ für alle $T \subset A$.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn $f\big(f^{-1}(S)\big) = S$ für alle $S \subset B$.

Aufgabe 9
Wir betrachten die Menge

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} ; \quad z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) H bildet bezüglich der Addition von Matrizen eine abelsche Gruppe.

(b) Die Menge $H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ bildet bezüglich der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe. Ist diese Gruppe abelsch?
H heißt der *Schiefkörper der Quaternionen*.

Aufgabe 10
Betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \Phi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 6,\\
&\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \Phi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2y_1 + x_2y_2,\\
&\Phi_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \Phi_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1,\\
&\Phi_4 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \Phi_4((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 5x_3y_3,\\
&\Phi_5 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \Phi_5((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,\\
&\Phi_6 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \Phi_6((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2.
\end{aligned}$$

(1) Sind diese Abbildungen Bilinearformen?

(2) Entscheiden Sie, für die Bilinearformen jeweils, ob diese symmetrisch sind.

(3) Geben Sie, falls möglich, jeweils die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis an und entscheiden Sie, ob die Abbildung positiv definit ist.

Aufgabe 11
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $<,>$. Für jede Teilmenge $M \subseteq V$ definieren wir seinen Orthogonalraum

$$M^\perp := \{v \in V;\ < m, v >= 0\ \forall\ m \in M\}.$$

(a) Ist M ein Untervektorraum von V?

(b) Zeigen Sie:

  (1) Es gilt $M \subseteq (M^\perp)^\perp$,

  (2) es gilt $M^\perp =< M >^\perp$ und

  (3) aus $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V$ folgt $M_1^\perp \supseteq M_2^\perp$.

Aufgabe 12
Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraumes des $\mathbb{R}^5$ bezüglich des kanonischen Skalarproduktes:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\2\\3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$