Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
19.10.2011
Blatt 2

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge von G. Man zeige, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

   (1) $H \neq \emptyset$,

   (2) $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$.

2. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist

   $$Z(G) = \{x \in G;\ x * y = y * x \quad \forall y \in G\} \subset G.$$

   Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.

3. Betrachten Sie die folgende Verknüpfung $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

   $$(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) := (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 + a_1 c_2,\ c_1 + c_2).$$

   Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^3, *)$ eine Gruppe ist. Ist es eine abelsche Gruppe?
   Bemerkung: Diese Gruppe heißt die *Heisenberggruppe* und wird in der Quantenmechanik verwendet.

4. Welche der folgenden Abbildungen

   (a) $f_1 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), z \mapsto 2z$,

   (b) $f_2 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), z \mapsto z + 1$,

   (c) $f_3 : (\mathbb{Q}, +)^3 \to (\mathbb{Q}, +)^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2z, 3x - y)$,

   (d) $f_4 : (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot), z \mapsto |z|$,

   (e) $f_5 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), z \mapsto |z|$

   sind Homomorphismen?

Abgabe: 28.10.2011, 11.00 Uhr