Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
26.10.2011
Blatt 3

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Sei $f : (G, *) \to (H, \cdot)$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie:
   (1) $f(e) = e'$, wenn $e \in G$ und $e' \in H$ die neutralen Elemente bezeichnen.
   (2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ für alle $a \in G$.
   (3) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : H \to G$ ein Homomorphismus.

2. Man definiere auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ die folgenden Verknüpfungen:
   $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
   $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$
   Man zeige, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit diesen Verknüpfungen einen Körper bildet.
   Bemerkung: Dieser Körper heißt *der Körper der komplexen Zahlen* und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Man bezeichnet das Element $(0, 1) \in \mathbb{C}$ als komplexe Zahl i. Hiermit lässt sich jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ in der Form
   $$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) =: a + bi$$
   schreiben. Dabei wird a als *Realteil* und b als *Imaginärteil* von z bezeichnet. Die komplexe Zahl i besitzt die Eigenschaft $i^2 = (-1, 0) = -1$ und kann somit als Quadratwurzel von -1 interpretiert werden.

3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgende Formel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:
   $$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

4. Sei K ein Körper und X eine nicht leere Menge. Sei $V = \mathrm{Abb}(X, K)$ die Menge aller Abbildungen von X nach K. Man definiert die Summe zweier Elemente $f, g \in V$ als Abbildung
   $$f + g : X \to K, \qquad x \mapsto f(x) + g(x),$$
   sowie das skalare Produkt eines Skalars $\alpha \in K$ mit einer Abbildung $f \in V$ durch
   $$\alpha f : X \to K, \qquad x \mapsto \alpha f(x).$$
   Zeigen Sie, dass V mit diesen Verknüpfungen einen K-Vektorraum bildet, den so genannten *Vektorraum der K-wertigen Funktionen auf X*.

Abgabe: 04.11.2011, 11:00 Uhr