Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
02.11.2011
Blatt 4

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$ gilt
   (a) $0_K \cdot v = 0_V$,
   (b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,
   (c) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K \quad \text{oder} \quad v = 0_V$,
   (d) $(-1) \cdot v = -v$.

2. Seien
$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\},$$
$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 = x_2 = 0\},$$
$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_3 = x_4 = 0\},$$
$$E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 \leq 0\},$$
$$E_5 = \mathbb{Q}^4.$$
   Sind $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5$ lineare Unterräume vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$?
   Berechnen Sie $E_2 \cap E_3$.

3. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden:
   (a) $u = (1, 0, 0),\ v = (0, -1, 0),\ w = (0, 0, 2)$;
   (b) $u = (1, 0, 0),\ v = (0, -1, 0),\ w = (0, 2, 0)$;
   (c) $u = (1, 1, 1),\ v = (3, 0, -1),\ w = (-1, 1, -1)$;
   (d) $u = (1, 0, 0),\ v = (0, 1, -1),\ w = (2, 1, -1)$;
   (e) $u = (1, 0, 0),\ v = (0, 1, -1),\ w = (2, 2, -1)$.

4. Seien V ein K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ mit $r \geq 2$. Beweisen Sie:
   Die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer von ihnen als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

Abgabe: 11.11.2011, 11:00 Uhr