Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
09.11.2011
Blatt 5

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die *kanonische* Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ setze man $v_i = e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

2. Sei K ein Körper, X eine nicht leere Menge und $V = \mathrm{Abb}(X, K)$ der K-Vektorraum der K-wertigen Funktionen auf X (Blatt 3). Wir nehmen an, dass X aus $n \in \mathbb{N}$ Elementen besteht. Zeigen Sie, dass $\dim_K V = n$.

(*Hinweis*: Sie können zuerst folgendes zeigen: Für $x \in X$ bezeichne $f_x : X \to K$ diejenige Funktion, die durch $f_x(x) = 1$ und $f_x(y) = 0$ für $y \neq x$ gegeben ist. Dann ist für paarweise verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$ das System $\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}$ eine Basis von V.)

3. Es seien U, U' endlich-dimensionale lineare Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Summe $U + U'$ ist direkt.

(2) $\dim_K(U + U') = \dim_K U + \dim_K U'$.

4. Es sei $f : V \to V'$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen mit $\dim_K V = \dim_K V'$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist ein Monomorphismus;

(2) f ist ein Epimorphismus;

(3) f ist ein Isomorphismus.

Abgabe: 18.11.2011, 11:00 Uhr