Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
23.11.2011
Blatt 7

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Sei $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Seien $W \subset V$ und $W' \subset V'$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass die Mengen
$$f(W) = \{f(w); w \in W\} \subset V'$$
und
$$f^{-1}(W') = \{v \in V; f(v) \in W'\} \subset V$$
Untervektorräume sind.

2. Sei $p \neq 0$ eine fest vorgegebene ganze Zahl. Man betrachte $\mathbb{Z}$ mit der folgenden Relation
$$a \sim b \iff \exists\, c \in \mathbb{Z} \;\text{ mit }\; a - b = c \cdot p.$$
Entscheiden Sie, ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

3. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ eine Kette von Untervektorräumen (d. h. U_1 und U_2 sind Untervektorräume von V und zusätzlich ist U_1 ein Untervektorraum von U_2). Zeigen Sie:
   (a) Die Abbildung
$$\begin{aligned} \Psi : V/U_1 &\longrightarrow V/U_2\,, \\ v + U_1 &\mapsto v + U_2 \end{aligned}$$
   ist wohldefiniert.
   (b) Die Abbildung Ψ ist K-linear.
   (c) $\ker(\Psi) = \Big\{v + U_1 \in V/U_1; v \in U_2\Big\}$.
   (d) $(V/U_1)\Big/(U_2/U_1) \cong V/U_2$.

4. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie, falls möglich, $A + B$, $B + C$, AC, CA, BC und $A(2B - 3C)$.

Abgabe: 02.12.2011, 11:00 Uhr