Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
30.11.2011
Blatt 8

Übungen zu Lineare Algebra I

WICHTIG: Am Montag 05.12.2011 findet die Vorlesung in 5F statt!!

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest und
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie A^2, A^3, A^4, A^5. Raten Sie eine Formel für A^n, $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion nach n.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, x + y, z)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Sei $\mathcal{E} = \big(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\big)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie auch die Basis $\mathcal{V} = \big(v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, -1, 0)\big)$.
   (a) Stellen Sie die Darstellungsmatrix $A_{f\mathcal{E}\mathcal{E}}$, die f bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ des Definitionsbereiches und des Wertebereiches beschreibt, auf.
   (b) Finden Sie eine Basis für $\mathrm{im}(f)$ und für $\ker(f)$. Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f)$ und $\mathrm{rg}(f)$.
   (c) Stellen Sie die Darstellungsmatrix $A_{f\mathcal{E}\mathcal{V}}$, die f bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ des Definitionsbereiches und der Basis $\mathcal{V}$ des Wertebereiches beschreibt, auf.
   (d) Stellen Sie auch die Darstellungsmatrix $A_{f\mathcal{V}\mathcal{E}}$ auf.

3. Sei $\mathcal{V} = \big(v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (2, -1, 4), v_3 = (0, 1, 2)\big)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ des Definitionsbereiches und des Wertebereiches durch die Matrix
$$A_{f\mathcal{V}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben ist.
   (a) Berechnen Sie $f(w)_{\mathcal{V}}$, wobei $w = (4, 0, 4) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Berechnen Sie $\mathrm{im}(f)$ und $\ker(f)$.

4. (a) Gibt es eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?
   (b) Gibt es eine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?
   (c) Gibt es eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?
   (d) Gibt es eine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

   Falls ja, so geben Sie ein Beispiel an und rechnen die gewünschten Eigenschaften nach. Falls nein, so beweisen Sie dies.

Abgabe: 09.12.2011, 11:00 Uhr