Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
07.12.2011
Blatt 9

Übungen zu Lineare Algebra I

1. (a) Formen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine Zeilenstufenform um und bestimmen Sie $\mathrm{rg}(A)$.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 5u - 5w &= 3 \\ 2z + u - 3w &= 3 \\ -3x + 6y - z + 10u &= 3. \end{cases}$$

2. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie $\det(A)$ und die Inverse A^{-1} von A.

   (b) Gibt es eine Matrix B, so dass $AB = C$?

3. Für $k \in \mathbb{R}$ definieren wir den linearen Unterraum

$$S_k = \langle (1,1,k), (k,1,1), (k,k,0) \rangle$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie

$$\bigcap_{k \in \mathbb{R}} S_k \,.$$

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spalten von A. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$. Zeigen Sie:

   (a) f ist genau dann injektiv, wenn $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig sind.

   (b) Es gilt $\mathrm{im}(f) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Abgabe: 16.12.2011, 11:00 Uhr