Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
21.12.2011
Blatt 11

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Sei $h \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ (vgl. Blatt 10 Aufgabe 3), die durch

$$f(a_0+a_1X+a_2X^2) = a_0+3a_2+(3a_1-6a_2)X+(-a_0-3a_2)X^2+(2a_0+a_1+ha_2)X^3$$

definiert ist.

   (a) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{R}$-linear ist.

   (b) Finden Sie für jedes $h \in \mathbb{R}$ eine Basis für $\mathrm{im}(f)$ und für $\ker(f)$.

   (c) Für welche $h \in \mathbb{R}$ gilt $\dim \ker(f) = 1$?

2. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, wobei V die Basis $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ und W die Basis $\mathcal{D} = (d_1, \ldots, d_m)$ habe. Für jeden Vektor $v \in V$ wissen wir dann, dass

$$f(v)_{\mathcal{D}} = A_{f\mathcal{C}\mathcal{D}} \cdot v_{\mathcal{C}} \qquad (*)$$

gilt. Wir betrachten nun den speziellen Fall, bei dem $V = W$ ist, also insbesondere $n = m$ gilt, und bei dem $f = \mathrm{id}$ die Identitätsabbildung ist. Dann wird die Gleichung $(*)$ zu

$$v_{\mathcal{D}} = A_{\mathrm{id}\mathcal{C}\mathcal{D}} \cdot v_{\mathcal{C}}.$$

Hiermit können die Koordinaten $v_{\mathcal{D}}$ von $v \in V$ bzgl. der Basis $\mathcal{D}$ aus den Koordinaten $v_{\mathcal{C}}$ von v bzgl. der Basis $\mathcal{C}$ berechnet werden. Deswegen heißt Matrix $A_{\mathrm{id}\mathcal{C}\mathcal{D}}$ die *Basiswechselmatrix*.

In $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ (vgl. Blatt 10 Aufgabe 3) betrachten wir die Polynome

$$p_1(X) = X^2, \quad p_2(X) = (X-1)^2, \quad p_3(X) = (X+1)^2$$

und

$$q_1(X) = 1, \quad q_2(X) = X+1, \quad q_3(X) = X^2+X+1.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P} = \big(p_1(X), p_2(X), p_3(X)\big)$ und $\mathcal{Q} = \big(q_1(X), q_2(X), q_3(X)\big)$ jeweils Basen von $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ sind.

   (b) Sei $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{B}}$.

   (c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{Q},\mathcal{B}}$.

   (d) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

   (e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms

$$w(X) := 3p_1(X) + 2p_2(X) - p_3(X)$$

   bezüglich der Basis $\mathcal{Q}$.

Bitte wenden!

3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen A, B, C.

4. Sei K ein Körper. Man betrachte auf $K^{n\times n}$ die folgende Relation

$$A \sim B \iff A \text{ und } B \text{ sind ähnlich.}$$

Beweisen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

* * *

Die folgende Extra-Aufgabe ist nur für die **Mathematik-Studierenden**.
Diese können hierbei **3 zusätzliche Credit-Points** erlangen. Es sind **keine Gruppenabgaben** erlaubt. Die Bearbeitung ist bis 13.01.2012, 11:00 Uhr, mit Namen und Matrikelnummer in die Übungskästen (wie üblich) einzuwerfen.
Die Lösung dieser Aufgabe soll **auf einem separaten Blatt** abgegeben werden und muss nicht mehr als eine Seite sein.

Extra-Aufgabe. (a) Beschreiben Sie, wie man eine Darstellungsmatrix von einer linearen Abbildung $f : V \to W$ aufbauen kann.

(b) Sei $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Für $i = 1, \dots, n$ setze man $v_i = e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n$. Nach Blatt 5 Aufgabe 1, ist auch $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto v$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $A_{\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{E}}$, $A_{\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{V}}$, $A_{\mathrm{id},\mathcal{V},\mathcal{E}}$, $A_{\mathrm{id},\mathcal{V},\mathcal{V}}$.

Abgabe: 13.01.2012, 11:00 Uhr

****
*** **Fröhliche Weihnachten** ***
*** **und frohes neues Jahr!** ***
****