Blatt 11

Lösungshinweise

Aufgabe 2

(a) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 \cdot p_1(X) + \alpha_2 \cdot p_2(X) + \alpha_3 \cdot p_3(X) \\
&= \alpha_1 \cdot X^2 + \alpha_2 \cdot (X-1)^2 + \alpha_3 \cdot (X+1)^2 \\
&= \alpha_1 \cdot X^2 + \alpha_2 \cdot (X^2 - 2X + 1) + \alpha_3 \cdot (X^2 + 2X + 1) \\
&= (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot 1 + (-2\alpha_2 + 2\alpha_3) \cdot X + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot X^2
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt, daß $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $-2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ und somit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
D.h. p_1, p_2 und p_3 sind linear unabhängig. Da außerdem $\dim \mathbb{R}_{\leq 2}[X] = 3$ gilt, folgt $\mathcal{P} = (p_1, p_2, p_3)$ Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$.

Für $\mathcal{Q}$ analog.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}(p_1(X)) &= p_1(X) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2 \\
\mathrm{id}(p_2(X)) &= p_2(X) &= 1 \cdot 1 - 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 \\
\mathrm{id}(p_3(X)) &= p_3(X) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2
\end{aligned}$$

Somit

$$A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}(q_1(X)) &= q_1(X) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\
\mathrm{id}(q_2(X)) &= q_2(X) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\
\mathrm{id}(q_3(X)) &= q_3(X) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 1 \cdot X^2
\end{aligned}$$

Somit

$$A_{\mathrm{id},\mathcal{Q},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht nachrechnet ist

$$A_{\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{Q}} = (A_{\mathrm{id},\mathcal{Q},\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{Q}} = A_{\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{Q}} \cdot A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$w(X) = 3 \cdot p_1(X) + 2 \cdot p_2(X) - p_3(X)$$

Somit

$$(w(X))_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$(w(X))_{\mathcal{Q}} = A_{\mathrm{id},\mathcal{P},\mathcal{Q}} \cdot (w(X))_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Nur die Ergebnisse!

Matrix A:
Charakteristisches Polynom: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - (2 + \sqrt{2}))(\lambda - (2 - \sqrt{2}))$.
Eigenwerte: $2, 2 + \sqrt{2}$ und $2 - \sqrt{2}$.

$\mathrm{Eig}_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_A(2 + \sqrt{2}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_A(2 - \sqrt{2}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Matrix B:
Charakteristisches Polynom: $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$.
Eigenwerte: $0, 1$ und 3.

$\mathrm{Eig}_B(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_B(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_B(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Matrix C:
Charakteristisches Polynom: $\chi_C(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 5)$.
Eigenwerte: $0, 4$ und -5.

$\mathrm{Eig}_C(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_C(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}_C(-5) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 4

Für die Einheitsmatrix $E_n = (e_{ij}) \in K^{n \times n}$ gilt

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $1 \leq i, j \leq n$.

E_n ist das neutrale Element von $\mathrm{GL}_n(K) := \{S \in K^{n \times n} | \; S \text{ invertierbar}\}$ („General Linear Group").

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich genau dann, wenn es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.

Behauptung: Die Ähnlichkeitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Reflexivität:

$$A = E_n^{-1} A E_n$$

Also A ähnlich A.

Symmetrie:

A ähnlich $B \Rightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_n(K) : B = S^{-1}AS$.

$B = S^{-1}AS \Rightarrow A = SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1}$.

Also B ähnlich A.

Transitivität

A ähnlich B und B ähnlich $C \Rightarrow \exists S, T \in \mathrm{GL}_n(K) : B = S^{-1}AS$ und $C = T^{-1}BT$.

$B = S^{-1}AS$ und $C = T^{-1}BT \Rightarrow C = T^{-1}(S^{-1}AS)T = (ST)^{-1}A(ST)$.

Also A ähnlich C. ∎