Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
11.01.2012
Blatt 12

Übungen zu Lineare Algebra I

1. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Für jedes $a \in G$ definieren wir
$$f_a : G \to G,\ b \mapsto a * b.$$
   (1) Ist f_a ein Homomorphismus von Gruppen?
   (2) Ist f_a bijektiv?
   (3) Seien $a, a' \in G$ mit $a \neq a'$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen f_a und $f_{a'}$ verschieden sind.
   (4) Zeigen Sie, dass $f_a \circ f_{a'} = f_{a*a'}$ für alle $a, a' \in G$.

2. Sind die folgende Teilmengen Untervektorräume des angegebenen Vektorraumes? Falls ja, gegeben Sie jeweils eine Basis an. Begründen Sie Ihre Antwort.
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 = x_3\} \subset \mathbb{R}^3$,
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$,
   (c) $\langle t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5 \rangle \subset \mathbb{R}[t]$,
   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a + 2b = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$,
   (e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a + d = b + 2c = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

3. Sei $\mathbb{R}_{\leq 5}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit Grad ≤ 5. Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}_{\leq 5}[X]$:
$$H = \{P(X) \in \mathbb{R}_{\leq 5}[X];\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.$$
   Ist H ein Untervektorraum von $\mathbb{R}_{\leq 5}[X]$? Falls ja, bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von H.

4. (1) Sei $k \in \mathbb{R}$. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1+k & 2+k & 3+k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1-2k & 2-2k & 3-2k \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie $\det(A)$.
   (2) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

Abgabe: 20.01.2012, 11:00 Uhr