Aufgabe 1 [15 Punkte]

Bei den folgenden fünf Aufgabenteilen (a)–(e) können jeweils **mehrere Antworten** richtig sein. Für jeden komplett richtig beantworteten Teil erhalten Sie drei Punkte, ansonsten null Punkte.

Markieren Sie die richtigen Aussagen so: ☐ ☒ ☐ ☐ ☒
Korrektur: ☐ ■ ☒ ☐ ☒

(a) Die Menge $\{(3x, t); x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ für

☐	☐	☒	☐
$t = -3$	$t = -2$	$t = 0$	$t = 3$

(b) Die Dimension von $\langle(2, 0, 0)\rangle + \langle(0, 2, 0)\rangle$ ist gleich

☐	☐	☒	☐
0	1	2	3

(c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ ist

☐	☒	☒
linear	injektiv	surjektiv

(d) Die Polynome $p_1(X) = 1 + 2X + X^2$, $p_2(X) = kX + X^2$, $p_3(X) = (k - 3)X^2$ sind in $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ linear abhängig für

☒	☐	☐	☒
$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$

(e) Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +),\ x \mapsto 3x,\\
&g : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto x^2,\\
&h : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto \tfrac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Welche dieser Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

☒	☒	☒
f	g	h

Aufgabe 2 [30 Punkte]
Betrachten Sie die folgende reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A. [5 Punkte]

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{2. Zeile}}}{=} -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-3+4) = -1$$

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix von A. [10 Punkte]

Hier wurde die Rechnung weggelassen. In der Klausur darf diese natürlich nicht fehlen.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A. [15 Punkte]

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{2. Zeile}}}{=} (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(1+\lambda)^3.$$

Der einzige Eigenwert ist somit -1.
Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren: Der Ansatz $(A - (-1)E_3)x = 0$ führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Die Zeilenstufenform ist $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Wir wählen $x_2 = r, x_3 = s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $x_1 = -\frac{1}{2}r + s$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert -1 ist somit

$$\left\{ (-\frac{1}{2}r + s, r, s)^t \, ; \, r, s \in \mathbb{R} \right\} \setminus \{(0,0,0)^t\}.$$

Aufgabe 3 [15 Punkte]
Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}; A \text{ invertierbar}\}$ (bezüglich der Multiplikation) und die Menge

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 1 \end{array} \right); a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M eine Teilmenge von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ist. [3 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, also $a \neq 0$.

Dann gilt $\det(A) = a \neq 0$, also $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass M eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ist. [12 Punkte]

- Da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ ist $M \neq \emptyset$.
- Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, also, $a \neq 0$ und $c \neq 0$.

  Dann gilt $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ (beachte, dass $ac \neq 0$).
- Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, also $a \neq 0$.

  Dann gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ (beachte $\frac{1}{a} \neq 0$).

Aufgabe 4 [25 Punkte]
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + 2y, -x, -x + y)$, die kanonische Basis $\mathcal{E} = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ von dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{V} = (v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -1, -1), v_3 = (1, 1, 0))$ von dem Wertebereich $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{f,\mathcal{E},\mathcal{V}}$, die f bezüglich der Basen $\mathcal{E}$ des Definitionsbereichs und $\mathcal{V}$ des Wertebereichs beschreibt. [10 Punkte]

Für die erste Spalte sieht man leicht: $f(1, 0) = (1, -1, -1) = 1v_1 + 1v_2 + 0v_3$.
Für die zweite Spalte machen wir den Ansatz:

$$f(0, 1) = (2, 0, 1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1, 0, 0) + b(0, -1, -1) + c(1, 1, 0).$$

Dieser Ansatz führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ -b + c = 0 \\ -b = 1 \end{cases}$$

Also $b = -1, c = -1$ und $a = 3$. Damit $A_{f,\mathcal{E},\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? [10 Punkte]

Berechnung von $\ker(f)$: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (0, 0, 0)$, d.h. $(x + 2y, -x, -x + y) = (0, 0, 0)$. Also $x + 2y = 0, -x = 0$ und $-x + y = 0$. Es folgt sofort $x = y = 0$. Also $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ mit Basis $\emptyset$.

Berechnung von $\operatorname{im}(f)$: Die Dimension des Bildes von f ist gleich dem Rang der Darstellungsmatrix, also gleich 2. Da $f(1, 0) = (1, -1, -1)$ und $f(0, 1) = (2, 0, 1) \in \operatorname{im}(f)$ und diese Vektoren linear unabhängig sind gilt

$$\operatorname{im}(f) = \langle (1, -1, -1), (2, 0, 1) \rangle.$$

Eine Basis ist damit $\{(1, -1, -1), (2, 0, 1)\}$.

Da $\ker(f) = \{(0, 0\}$, ist f injektiv. Da $\dim(\operatorname{im}(f)) \neq 3$ ist f nicht surjektiv.

(c) Finden Sie eine Basis von $\operatorname{im}(f) \cap \langle f(1, -1) \rangle$. [5 Punkte]

Da $f(1, -1) \in \operatorname{im}(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ ein Untervektorraum ist, gilt $\langle f(1, -1) \rangle \subset \operatorname{im}(f)$, d.h. $\operatorname{im}(f) \cap \langle f(1, -1) \rangle = \langle f(1, -1) \rangle$.
Da $f(1, -1) = (-1, -1, -2)$, ist $\{(-1, -1, -2)\}$ eine Basis.

Aufgabe 5 [15 Punkte]
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass:

(a) $\ker(f) \subset \ker(f \circ f)$. [5 Punkte]

Sei $v \in \ker(f)$, d.h. $f(v) = 0_V$.

Dann gilt $f(f(v)) = f(0_V) \overset{f \text{ linear}}{=} 0_V$, d.h. $v \in \ker(f \circ f)$.

(b) Aus $\operatorname{im}(f) \cap \ker(f) = \{0_V\}$ folgt $\ker(f) = \ker(f \circ f)$. [10 Punkte]

„$\ker(f \circ f) \subset \ker(f)$“:
Sei $v \in \ker(f \circ f)$, d.h. $f(f(v)) = 0_V$. Dies zeigt $f(v) \in \ker(f)$. Nach Definition von $\operatorname{im}(f)$ gilt $f(v) \in \operatorname{im}(f)$. Also $f(v) \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0_V\}$, d.h. $v \in \ker(f)$.

„$\ker(f) \subset \ker(f \circ f)$“: Gilt nach (a).