Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
P.D. Dr. C. Bertolin

WS 2011/12
30.01.2012

Klausur zu Lineare Algebra I

Aufgabe 1 [15 Punkte]

Bei den folgenden fünf Aufgabenteilen (a)–(e) können jeweils **mehrere Antworten** richtig sein. Für jeden komplett richtig beantworteten Teil erhalten Sie drei Punkte, ansonsten null Punkte.

Markieren Sie die richtigen Aussagen so: ☐ ☒ ☐ ☐ ☒
Korrektur: ☐ ■ ☒ ☐ ☒

(a) Die Menge $\{(3x, t); x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ für

☐	☐	☐	☐
$t = -3$	$t = -2$	$t = 0$	$t = 3$

(b) Die Dimension von $\langle(2,0,0)\rangle + \langle(0,2,0)\rangle$ ist gleich

☐	☐	☐	☐
0	1	2	3

(c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ ist

☐	☐	☐
linear	injektiv	surjektiv

(d) Die Polynome $p_1(X) = 1 + 2X + X^2$, $p_2(X) = kX + X^2$, $p_3(X) = (k-3)X^2$ sind in $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ linear abhängig für

☐	☐	☐	☐
$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$

(e) Wir betrachten die Abbildungen

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +),\ x \mapsto 3x,$$
$$g : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto x^2,$$
$$h : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto \tfrac{1}{x}.$$

Welche dieser Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

☐	☐	☐
f	g	h

Aufgabe 2 [30 Punkte]
Betrachten Sie die folgende reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A. [5 Punkte]

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix von A. [10 Punkte]

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A. [15 Punkte]

Aufgabe 3 [15 Punkte]
Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}; A \text{ invertierbar}\}$
(bezüglich der Multiplikation) und die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M eine Teilmenge von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ist. [3 Punkte]

(b) Zeigen Sie, dass M eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ist. [12 Punkte]

Aufgabe 4 [25 Punkte]
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+2y, -x, -x+y)$, die kanonische Basis $\mathcal{E} = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ von dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{V} = (v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-1,-1), v_3 = (1,1,0))$ von dem Wertebereich $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{f,\mathcal{E},\mathcal{V}}$, die f bezüglich der Basen $\mathcal{E}$ des Definitionsbereichs und $\mathcal{V}$ des Wertebereichs beschreibt. [10 Punkte]

(b) Finden Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? [10 Punkte]

(c) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f) \cap \langle f(1,-1) \rangle$. [5 Punkte]

Aufgabe 5 [15 Punkte]
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass:

(a) $\ker(f) \subset \ker(f \circ f)$. [5 Punkte]

(b) Aus $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0_V\}$ folgt $\ker(f) = \ker(f \circ f)$. [10 Punkte]