

Modelltheorie II – Blatt 8  
Abgabe am 17.6.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir in der Sprache  $L_{RV}$  und in der Theorie  $HEN_{0,0}$  der bewerteten Körper der Charakteristik  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 1 (6 Punkte):**

(a) Sei  $f \in K[x]$  ein Polynom. Zeigen Sie: Es existieren endlich viele  $c_1, \dots, c_\ell \in K$ , so dass  $rv(f(x))$  nur von  $(rv(x - c_i))_i$  abhängt, d. h. es existiert eine Funktion  $g: RV^\ell \rightarrow RV$ , so dass für alle  $a \in K$  gilt:  $rv(f(a)) = g((rv(x - c_i))_i)$ .

Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.3.7.

(b) Sei weiterhin  $f \in K[x]$  ein Polynom. Zeigen Sie: Es existiert eine endliche Teilmenge  $C \subset K$ , so dass für jeden (offenen) Ball  $B_{>\lambda}(a) = \{x \in K \mid v(x - a) > \lambda\}$  gilt: Ist  $B_{>\lambda}(a)$  disjunkt von  $C$ , so ist  $x \mapsto rv(f(x))$  konstant auf  $B$ .

(c) Sei nun  $Y \subset K$  eine (mit Parametern) definierbare Teilmenge. Zeigen Sie: Es existiert eine endliche Teilmenge  $C \subset K$ , so dass jeder Ball  $B_{>\lambda}(a)$ , der disjunkt zu  $C$  ist, entweder vollständig in  $Y$  oder vollständig in  $K \setminus Y$  liegt. Hierfür dürfen Sie Satz 2.2.6 (Quantorenelimination) verwenden.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die freie Variable der VF-qf-Formel, die  $Y$  definiert, in der Formel auftreten kann. Verwenden Sie dann (b).

**Aufgabe 2 (5 Punkte):**

Finden Sie eine VF-qf-Formel, die äquivalent ist zu  $\phi(z, \zeta) = \exists x \in VF: (x^2 + x + z = 0 \wedge rv(x) = \zeta)$ .

Hinweis: Das kann man zwar mit Satz 2.3.9 machen, scheint mir aber recht aufwändig zu werden. (Nach Anwenden von 2.3.9 braucht man noch so was wie Lemma 2.4.3 (c).) Einfacher ist es vermutlich „von Hand“, unter Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (und man erhält auch eine schönere VF-qf-Formel): Sie können z. B. zunächst VF-qf ausdrücken, ob  $x^2 + x + z$  überhaupt eine Nullstelle hat. Um dann weiterzurechnen stellt es sich als nützlich heraus, den Fall  $v(z) > 0$  separat zu behandeln.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**

Verwenden Sie Lemma 2.4.1, um einen neuen Beweis von Quantorenelimination in algebraisch abgeschlossenen Körpern zu geben, in dem explizit beschrieben wird, wie der Existenzquantor in Formeln der Form

$$\exists x \left( \bigwedge_{i \leq m} f_i(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{j \leq n} g_j(x, \underline{z}) \neq 0 \right)$$

eliminiert werden kann.

Sie brauchen nicht alles im Detail aufzuschreiben; es reicht, wenn Sie den Beweis skizzieren.