Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner

Wintersemester 2004/05
21.12.04
Blatt 10

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

1. (a) Berechnen Sie die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{100}{101}$ und $\frac{15}{17}$; schreiben Sie $0,10\overline{34}$ und $0,\overline{2345}$ als gewöhnlichen Bruch.
   (b) Ordnen Sie die folgenden reellen Zahlen der Größe nach:
   $3(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, e^2, $19 \cdot \log_{100} 10$, $e^{log_5 125}$, $(1+\frac{1}{10000})^{20000}$, $\sqrt{99}$, $1001^{\frac{1}{3}}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{20}{3}$,
   (c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen i mit $1 \le i \le 10$.
   (d) Berechnen Sie $\sum_{i=5}^{100}(i+1)$ und $\sum_{i=5}^{100} 3^i$.
2. (a) (Zinseszins)
   (i) Wie hoch müssen die jährlichen Zinsen $p\%$ sein, damit sich ein angelegtes Kapitel K_0 innerhalb von 10 Jahren verdoppelt ?
   (ii) Wie lange dauert es, damit sich bei einem jährlichen Zinssatz von 3% ein angelegtes Kapitel K_0 verdoppelt ?
   (iii) Das Kapitel K_0 wird für 4 Jahre fest angelegt mit einer jährlichen Verzinsung von $p_i\%$ im i-ten Jahr. Wie hoch ist die durchschnittliche Verzinsung, falls $p_1 = 2, p_2 = 2,5, p_3 = p_4 = 3$?
   (b) (Rentenaufbau)
   Zum Aufbau einer Kapitelrente wird zu Beginn eines jeden Jahres eine feste Rate R gezahlt. Die jährlichen Zinsen betragen während der gesamten Laufzeit 3%.
   (i) Wie hoch muß die Rate R sein, damit nach 30 Jahren ein Kapitel von 100 000 Euro zur Verfügung steht ?
   (ii) Wie lange dauert es für $R = 5000$ Euro bis 100 000 Euro Kapital erreicht sind ?
3. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen
   (a) $\frac{x}{x^2+1} = 1$
   (b) $\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} = x$
   (c) $2^{log_{10} x} = 3^{ln x}$
   (d) $x^4 + x^2 - 1$.
4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,e^{-x^2}$
   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
   (b) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.
   (c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f'.

Bitte wenden!

(d) Berechnen Sie die zweite Ableitung f'' von f.

(e) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(f) Berechnen Sie die Teilintervalle in denen f monoton wächst, bzw. monoton fällt.

(g) Bestimmen Sie Teilintervalle in denen f konvex, bzw. konkav ist.

(h) Berechnen Sie die Wendepunkte von f.

(i) Skizzieren Sie den Graph von f.

5. Gegeben sei die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

   (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

   (b) Berechnen Sie die Ableitung f'.

   (c) Berechnen Sie die zweite Ableitung f''.

   (d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

   (e) Bestimmen Sie die maximalen Teilintervalle des Definitionsbereichs in denen f monoton wächst, bzw. monoton fällt.

   (f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

6. Berechnen Sie die Elastizitäten der folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{R}_{>e} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$.

   (b) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.

   (c) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$.

7. Es sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion mit zugehöriger Matrix $M_L = (a_{ij}) \in M(m \times n)$.

   (a) Berechnen Sie das Bild $L((0))$ des Nullvektors $(0) \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Berechnen Sie das Bild des Standardeinheitsvektors $e_i \in \mathbb{R}^n$ für $1 \leq i \leq n$.

   (c) Zeigen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt $L(x+y) = L(x) + L(y)$, $L(rx) = rL(x)$.

   (d) Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x) = (0) \in \mathbb{R}^m\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

   (e) Sei $b \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Begründen Sie, dass die konstante Funktion $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G(x) = b$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$, keine lineare Funktion ist.

Hinweis für Aufgaben 1 - 6: Nur die Ergebnisse aufschreiben.

Frohe Weihnachten und viel Glück für das Jahr 2005.

Abgabe: Donnerstag, 06.01.2005, 13.45 Uhr (in die roten Briefkästen im Erdgeschoß des Gebäudes 25.22 in der Nähe des Geschäftszimmers).