Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner

Wintersemester 2004/05
11.11.04
Blatt 4

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

1. (a) Es sei $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ und

$$(*)\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

die zugehörige Polynomgleichung. Näherungsweise können Lösungen der Gleichung (*) durch das folgende Verfahren berechnet werden:
0. Schritt:
Man bestimme $a < b$ mit $P(a) < 0$ und $P(b) > 0$. Dann besitzt (bekanntlich) (*) eine Lösung x_0 im Intervall $I_0 = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$.
1. Schritt:
Bestimme den Mittelpunkt $c_1 = \frac{a+b}{2}$ des Intervalls I_0. Ist $P(c_1) = 0$, so ist c_1 eine Lösung von (*) und man kann das Verfahren abbrechen. Ist $P(c_1) > 0$ so besitzt (*) eine Lösung im Intervall $(a, c_1) = I_1$. Ist $\mathrm{P}(\mathrm{c}_1) < 0$ so besitzt (*) eine Lösung im Intervall $(c_1, b) = I_1'$.
2. Schritt:
Wiederhole den 1. Schritt für das Intervall I_1 (falls $P(c_1) > 0$) bzw. I_1' (falls $P(c_1) < 0$). Fahre auf diese Weise mit evtl. 3. Schritt .... fort.

(b) Es sei $P = x^3 + x + 1$. Dann gilt $P(-1) < 0$, $P(0) > 0$. Setze $(a, b) = (-1, 0)$ und führe die ersten 4 Schritte dieses Verfahrens aus.

2. (a) Gegeben sei die Polynomgleichung

$$(*)\ x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass -1 eine Lösung dieser Gleichung ist und berechnen Sie das Polynom $Q(x)$, vom Grad 4, mit $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x + 1)Q(x)$.

(ii) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung (*).

(b) Gegeben sei die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

(i) Bestimmen Sie die Grundmenge $G \subset \mathbb{R}$ für die die Gleichung definiert ist.

(ii) Berechnen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung.

3. In eine Kapitalrente wird eine monatliche Rate R eingezahlt, die durchschnittliche jährliche Rendite betrage $p\%$. Werden die Zinsen monatlich gutgeschrieben, so hat sich bekanntlich nach n Monaten ein Kapital

$$K_n = R\,\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \text{ mit } q = \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)$$

angesammelt.
Wie lange muß die Laufzeit sein, damit ein Endkapital von 60000,– Euro erreicht wird bei einer monatlichen Rate R von 100,– bzw. 200,– Euro und einer jährlichen Rendite von 3% bzw. 6% ? (Dies sind 4 verschiedene Fälle).

Bitte wenden!

4. (a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner
   (i) $\log_{10} 15 + \log_{10} 7 - \log_{10} 18 - \log_{10} 35 + \log_{10} 6$
   (ii) $\ln(11e^2) - \ln 3 - \ln 4 + \ln 36 - \ln 33$

   (b) Begründen Sie, dass für alle $x \geq 0$ gilt: $\ln(1+x) < x$.

Abgabe: Donnerstag, 18.11.2004, 9.15 Uhr (in die roten Briefkästen im Erdgeschoß des Gebäudes 25.22 in der Nähe des Geschäftszimmers).