Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. O. KERNER

Wintersemester 2004/05
18.11.04
Blatt 5

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

1. (a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen:
   (i) $\log_{e^2}(x^3+1) = \ln(x+1)$.
   (ii) $\log(x^2+1) = 2$.

   (b) Es sei a eine reelle Zahl mit $a > 1$.
   (i) Zeigen Sie: Ist x_0 eine Lösung der Gleichung $\log_a(x^2+4x+5) = 0$, so ist x_0 auch Lösung der Gleichung $\ln(x^2+4x+5) = 0$.
   (ii) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $\log_a(x^2+4x+5) = 0$.

2. Ein Kapital K_0 wird für 5 Jahre angelegt. Die jährlichen Zinsen betragen in den ersten beiden Jahren jeweils 2%, im 3., 4. und 5. Jahr jeweils 3, 4 und 5 Prozent.

   (a) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Rendite, wenn die Zinsen jährlich ausbezahlt werden ?

   (b) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Rendite (nach der Zinseszinsformel), wenn die Jahreszinsen gutgeschrieben werden ?

3. Seien $x_0 < x_1 < x_2$ drei reelle Zahlen und y_0, y_1, y_2 weitere reelle Zahlen. Sei $P(x)$ das Polynom

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 \;+\; \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \;+\; \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

   (a) Berechnen Sie $P(x_0), P(x_1), P(x_2)$.

   (b) Seien $x_0 = y_0 = 0$, $x_1 = y_1 = 1$, $x_2 = y_2 = 2$, berechnen Sie $P(x)$.

4. In einem einfachen Modell wird die einkommensabhängige Nachfrage $N(x)$ nach einem Produkt, wobei x das durchschnittliche Einkommen bezeichnet, durch die sog. Engelfunktion

$$N : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\,,\; N(x) = \frac{ax}{b+x}$$

   beschrieben; dabei sind a und b produktabhängige positive Parameter.
   Zeigen Sie:

   (a) Die Engelfunktion ist monoton wachsend.

   (b) $N(x) = 0 \iff x = 0$ und $N(x) < a$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
   (a heißt auch die Sättigungsnachfrage.)

   (c) $N(x) = a\left(1 - \frac{b}{b+x}\right)$.

   (d) Skizzieren Sie den Graphen der Engelfunktion.

Abgabe: Donnerstag, 25.11.2004, 9.15 Uhr (in die roten Briefkästen im Erdgeschoß des Gebäudes 25.22 in der Nähe des Geschäftszimmers).