Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner

Wintersemester 2004/05
25.11.04
Blatt 6

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

1. (a) Zeigen Sie: Ist ε eine positive reelle Zahl, so gibt es eine positive reelle Zahl x_0, so dass $0 < \frac{1}{1+x} < \varepsilon$ gilt, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_0$.

   (b) (i) Zeigen Sie (mit Hilfe von Satz 1.10):
   Ist $x > 0$, so gilt $0 < e^{-x} < \frac{1}{1+x}$.

   (ii) Zeigen Sie: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so gibt es eine positive reelle Zahl x_1 mit $0 < e^{-x} < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_1$.

   (c) Für ein neu auf dem Markt eingeführtes Produkt werden die erwarteten Verkaufszahlen durch die sogenannte Sättigungsfunktion

$$S : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$S(t) = \frac{a}{1 + ce^{-t}}$$

   (wobei t die Zeit bedeutet und $a, c > 0$ produktabhängige Parameter sind) beschrieben.
   Zeigen Sie:

   (i) S ist monoton wachsend.

   (ii) Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$: $0 < S(t) < a$.

   (iii) Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es eine reelle Zahl $t_1 > 0$ mit $a - \varepsilon < S(t) < a$ für alle $t > t_1$.

2. Es seien $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade Funktionen, $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade Funktionen. Begrün den Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $f_1 + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade Funktion,

   (b) $g_1 + g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade Funktion,

   (c) $f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade Funktion,

   (d) $g_1 \cdot g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade Funktion,

   (e) $f_1 \cdot g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade Funktion,

3. (a) Bestimmen Sie eine Polynomfunktion P vom Grad 3 mit $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ und $P(3) = 2$.

   (b) Zeigen Sie, dass P monoton wachsend ist für $x \leq 0$, und für $x \geq 2$.

4. Nach Satz 1.10 gilt für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$.
   Benutzen Sie diese Ungleichung, um zu zeigen, dass für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{x^m}$ zwar nach unten aber nicht nach oben beschränkt ist.

Abgabe: Donnerstag, 02.12.2004, 9.15 Uhr (in die roten Briefkästen im Erdgeschoß des Gebäudes 25.22 in der Nähe des Geschäftszimmers).