Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner

Wintersemester 2004/05
09.12.04
Blatt 8

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen
   (a) $0 < a \neq 1: \quad \log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R};$
   (b) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^x;$
   (c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}};$
   (d) h: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{x \cdot lnx}{(x^2+1)}$.

2. Es sollen die drei folgenden differenzierbaren Funktionen untersucht werden:
$$K : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ k(x) = \frac{K_F}{x} + px^{\lambda-1}$$
(wobei $K_F, p > 0$ und $\lambda > 1$),
$$S : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ S(x) = \frac{a}{1 + be^{-x}}$$
(wobei $a, b > 0$),
$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ V(x) = e^{-x^2}.$$
   (A) Berechnen Sie für jede dieser Funktionen:
      a) Die Ableitung.
      b) Wie Werte von x in denen die Ableitung positiv, negativ bzw. 0 ist.
      c) Die Teilintervalle des Definitionsbereichs, in denen die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt.
      d) Die Teilintervalle des Definitionsbereichs, in denen die Funktion konvex ist.
   (B) Skizzieren Sie für $K_F = 10, p = 1, \lambda = \frac{3}{2}, a = b = 1$ die Graphen der drei Funktionen.

3. Die verkaufte Stückzahl eines konkurrenzlosen Produkts in Abhängigkeit vom Preis x wird durch die Preis-Absatz-Funktion $A : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ A(x) = Cx^{-\lambda}$ mit $\lambda > 0$ beschrieben. Der erzielte Umsatz ist dann $xA(x)$. Die Herstellungskosten sollen durch die einfache Kostenfunktion $K(s) = K_F + ps$, wobei s die Stückzahl ist, beschrieben werden.
Die Gewinnfunktion $S : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ wird dann beschrieben durch
$$G(x) = x \cdot A(x) - (K_F + pA(x)).$$
   (a) Berechnen Sie die Ableitung G' von G.
   (b) Zeigen Sie: Ist $0 < \lambda \leq 1$, so ist G monoton wachsend.
   (c) Sei $\lambda > 1$, berechnen Sie $G'\left(\frac{\lambda p}{\lambda-1}\right)$ und bestimmen Sie die Teilintervalle von $\mathbb{R}_{>0}$ in denen G monoton wächst bzw. fällt.
   (d) Sei $\lambda = 1$ und $C = 2K_F = 100p$. Bestimmen Sie die Nullstelle von G und den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} G(x)$.

Abgabe: Donnerstag, 16.12.2004, 9.15 Uhr (in die roten Briefkästen im Erdgeschoß des Gebäudes 25.22 in der Nähe des Geschäftszimmers).