Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

WS 2005/06
23.01.2006
Blatt 12

Übungen zu
Mathematische Optimierung I

43. (2P) (Teilaussage des Dualitätssatzes der linearen Optimierung)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ sowie die Optimierungsaufgaben

$$\begin{array}{llcll} (P) & \min c^T x & \text{und} & (D) & \max b^T u \\ & Ax \geq b & & & A^T u = c \\ & & & & u \geq o \end{array}$$

gegeben. Besitzt (P) eine Lösung, dann besitzt auch (D) eine Lösung, und die Optimalwerte der Zielfunktionen stimmen überein.

44. (2P) Seien $f, g_1, g_2, g_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$f(x) = x_1,\ g_1(x) = -x_1^3 + x_2,\ g_2(x) = -x_2$ und $g_3(x) = -x_1$.
Seien ferner $M_1 = \{x : g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0\}$ und $M_2 = M_1 \cap \{x : g_3(x) \leq 0\}$.
Bestimmen Sie für jedes der beiden Probleme

    (a) (1P) $\min\limits_{x\in M_1} f(x)$,
    (b) (1P) $\min\limits_{x\in M_2} f(x)$

die KKT-Punkte und die lokalen Minimalstellen. Verwenden Sie für die Minimalstellensuche soweit als möglich die KKT Bedingungen.

45. (2P) Die Funktionen $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und pseudokonvex für $i = 1, \ldots, k$ und (affin) linear für $i = k+1, \ldots, m$. Ferner existiere ein $\tilde{x} \in M = \{x\colon g_i(x) \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$ mit $g_i(\tilde{x}) < 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Sind Optimierungsaufgaben, die M als zulässige Menge besitzen, in M (d.h. in allen $x \in M$) regulär?

46. (2P) Leiten Sie direkt aus Satz 6 in Kap. III der Vorlesung das Lemma von Farkas ab. (Hinweis: Betrachten Sie das Problem, $b^T x$ unter der Restriktion $A^T x \leq 0$ zu maximieren.)

Abgabe: Mo., 30.01.2006, 14.00 Uhr