Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

WS 2005/06
19.12.2005
Blatt 9

Übungen zu Mathematische Optimierung I

31. (2P) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der symmetrischen, positiv definiten Matrizen. Sei (x_k) eine unendliche Folge, die durch Anwendung des SSP I - Liniensuchverfahrens

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \ x_{k+1} := x_k + \alpha_k s_k$$

mit $s_k = -M(x_k)\nabla f(x_k) \neq o$ erzeugt worden ist, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 und $M : \mathbb{R}^n \to P$ von der Klasse C^0 ist. Unter der Voraussetzung, daß $N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ beschränkt ist, zeige man

   (a) (x_k) besitzt einen Häufungspunkt.

   (b) Jeder Häufungspunkt der Folge ist kritischer Punkt von f.

32. (2P) Sei $F(x) = x^TQx/2 - b^Tx + \alpha$ mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und E die Einheitsmatrix. Man zeige, daß in diesem Falle das Verfahren der konjugierten Gradienten und das DFP-Verfahren, wenn in diesem $M_0 = E$ gewählt wird, übereinstimmen. (Beide Verfahren sind ohne Restart.)

33. (3P) Sei $F(x) = x^TQx/2 - b^Tx$ eine quadratische Form mit symmetrischer positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wendet man das DFP-Verfahren auf F an, erhält man bei jedem Schritt die Fehlerabschätzung

$$F(x_{k+1}) - F(x^+) \leq \frac{(\Lambda_k - \lambda_k)^2}{(\Lambda_k + \lambda_k)^2}[F(x_k) - F(x^+)],$$

wobei x^+ die Minimalstelle von F und λ_k bzw. Λ_k den kleinsten bzw. größten Eigenwert von M_kQ bezeichnen.

(Hinweis: Die Einführung von Matrizen $M_k^{1/2}\,Q\,M_k^{1/2}$ ist hilfreich.)

Moral der Abschätzung: Je besser Q^{-1} (bzw. H_f^{-1} im allgemeinen Fall) durch M_k approximiert wird, desto günstiger ist das Konvergenzverhalten.

34. (2P) SeiM_k die BFGS-Approximation von $H_f^{-1}(x_k)$ und $\tilde{M}_k$ die zur DFP-Updatingsformel duale Formel für BFGS (wie in der Vorlesung definiert). Dann gilt $M_k\tilde{M}_k = E$ für alle k, falls $M_0\tilde{M}_0 = E$ vorausgesetzt wird.

Abgabe: Mo., 09.01.2006, 14.00 Uhr

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 3 (2 PAP):

BFGS-Verfahren mit Hybrid-Newton Verfahren und Backtracking.
Um die positive Definitheit der Matrizen M_k zu sichern, sind geeignete Maßnahmen zu ergreifen. Zielfunktion wie in der Programmieraufgabe 1 auf Blatt 7, das heißt

$$f(x) = (x_2 - bx_1^2 + cx_1 - d)^2 + e(1 - f)\cos x_1 + c$$

Entnehmen Sie die Konstanten von f sowie die abzugebenden Ergebnisse der Programmieraufgabe 1 auf Blatt 7. Starten Sie wieder mit Ihrem persönlichen Startvektor.

Wir wünschen den Hörerinnen und Hörern der Mathematischen Optimierung I ein

Frohes Fest und ein gutes 2006!

Abgabe: 06.02.2006, 14.00 Uhr