Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

SS 2006
12.04.2006
Blatt 2

# Übungen zu
# Mathematische Optimierung II

5. (3P) Jede der beiden nachstehenden Optimierungsaufgaben ist geeignet, die Ungleichung

$$(x_1 + \ldots + x_n)/n \;\geq\; (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \quad \text{für} \quad x_i \geq 0$$

zu beweisen:

(i) Minimiere $x_1 + \ldots + x_n$ bzgl. $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1,\ x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n)$,

(ii) Maximiere $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ bzgl. $x_1 + \ldots + x_n = 1,\ x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n)$.

6. (1P) Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen von KKT direkt aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung von FJ ab.

7. (2P) Seien $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus $C^1$ und $\nabla h_j(x^*)$ für $j = 1, \ldots, s$ linear unabhängig, wobei $x^*$ lokale Minimalstelle von $f$ hinsichtlich der Restriktionen $g_i(x) \leq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ und $h_j(x) = 0\ (j = 1, \ldots, s)$ sei.
Dann ist bekannt, dass es kein $d \in \mathbb{R}^n$ gibt, das

$\alpha$) $d^T \nabla f(x^*) < 0$

$\beta$) $d^T \nabla g_i(x^*) < 0$ für $i \in A(x^*)$

$\gamma$) $d^T \nabla h_j(x^*) = 0$ für $j = 1, \ldots, s$

erfüllt (vergleiche Beweis zu Satz 18 aus Kapitel III aus MOI).
Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es aber ein $d \in \mathbb{R}^n$ geben kann, das $\alpha$) und $\beta$) erfüllt.

8. (2P) (Satz von Gordan) Sei $A$ eine $n \times m$ Matrix. Dann besitzt genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

(a) $A^T x < 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$

(b) $Ay = 0,\ y \geq 0$ für ein $y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$

Hinweis: eine Rückführung auf das Lemma von Farkas ist zweckmässig.

**Abgabe:** Mi., 19.04.2006, 13.00 Uhr

Bitte wenden!

**Programmieraufgabe 1 (2 PAP):**

$$f(x_1, x_2) = 16x_1^4 - 32x_1^2x_2 - 607x_1^2 + 32x_2^2 + 8x_1x_2 + 1152x_2 + 136x_1.$$

Lösen Sie die Aufgabe min $f(x_1, x_2)$ bzgl. der Restriktionen

$$-20 \leq x_1 + x_2 \leq -1,$$
$$4x_1x_2 + 68x_1 + x_2 = -19$$

mittels der Strafkostenmethode. Starten Sie mit Ihrem persönlichen Startvektor aus dem WS.

**Abgabe:** Mi., 05.07.2006, 13.00 Uhr