Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 3

Abgabe am 25.4.2019 in der Vorlesung

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ streng minimal und sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist κ-saturiert genau dann, wenn $\dim \mathcal{M} \geq \kappa$ ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Wir verwenden „$\exists^\infty x\colon \phi(x)$" als Kurzschreibweise für: Es gibt unendlich viele verschiedene x, so dass $\phi(x)$ gilt. Ist T eine Theorie, so sagen wir „T eliminiert den Quantor $\exists^\infty$", wenn zu jeder L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine L-Formel $\psi(\underline{y})$ existiert, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \exists^\infty x\colon \phi(x, \underline{b}) \iff \mathcal{M} \models \psi(\underline{b})$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen an eine Struktur $\mathcal{M}$ äquivalent sind:

(a) $\mathcal{M}$ ist streng minimal.

(b) Für jede Formel $\phi(x, \underline{y})$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass für alle $\underline{b} \in M^n$ gilt: $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ ist entweder unendlich oder hat höchstens n Elemente.

Korrektur: Hier hätte auch noch die Bedingung stehen sollen: „Jede definierbare Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist endlich oder ko-endlich"

(c) Jede definierbare Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist endlich oder ko-endlich und $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ eliminiert den Quantor $\exists^\infty$.

Hinweis: Wenn (b) nicht gilt, kann man in einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ Tupel $\underline{b}$ finden (die einen geeigneten Typ realisieren), mit denen man (a) und (c) widerlegen kann.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine $|M|$-saturierte Struktur und sei $A \subset M$ mit $|A| < |M|$. Zeigen Sie: Zwei Elemente $b, b' \in M$ haben den gleichen Typ über A genau dann, wenn es einen Automorphismus α von $\mathcal{M}$ gibt, der auf A die Identität ist und b auf b' abbildet.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.4.6.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $A \subset M$ und $b \in M$, so ist $b \in \mathrm{dcl}(A)$ genau dann, wenn eine $\emptyset$-definierbare Menge $X \subset M^n$ existiert (für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und eine $\emptyset$-definierbare Funktion $f\colon X \to M$, so dass $b \in \operatorname{im} f(X \cap A^n)$ ist.

Hinweis: Ist $\phi(\underline{a}, x)$ eine Formel, die b definiert, so lässt sich f ziemlich direkt mit Hilfe von ϕ definieren; man muss nur X geeignet definieren.

Aufgabe 5 (3 Punkte):

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ L-Strukturen, seien $A \subset M$ und $A' \subset M'$, und sei $f\colon A \to A'$ eine elementare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_*\colon S_n(A) \to S_n(A')$ ein Homöomorphismus ist, wenn man $S_n(A)$ und $S_n(A')$ mit den Topologien von Aufgabe 1 von Blatt 2 ausstattet. (In der Vorlsung wurde bereits gezeigt, dass f_* bijektiv ist; es bleibt also zu zeigen, dass offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.)

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModAnw_S19/