....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 7

Abgabe am 6.12.2018 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3+1 Punkte):

Sei $M = \bigcup_{n\in\omega} \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\dots\mathcal{P}}_{n \text{ mal}}(\emptyset)\dots))$; wir machen daraus eine L_{Me}-Struktur $\mathcal{M} = (M, \dot\in^{\mathcal{M}})$, indem wir $\dot\in$ als $\in$ interpretieren, d. h. für $a, b \in M$ setzen wir $a \mathrel{\dot\in^{\mathcal{M}}} b \iff a \in b$.

(a) Begründen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Modell von $\mathrm{ZFC}' := \mathrm{ZFC}\setminus\{\text{Unendlichkeit}\}$ ist.
(Zu den meisten Axiomen brauchen Sie nicht viel zu sagen. Für manche Axiome ist es nützlich, festzustellen, dass jede Menge $a \in M$ endlich ist.)

(b) Zeigen Sie: ZFC $\models$ „ZFC$'$ ist konsistent“
(Eigentlich ist nichts zu zeigen; erklären Sie einfach nur, warum das klar ist.)

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Finden Sie (in der Literatur oder im Netz) heraus, was der Satz von Löb besagt.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

In Aufgabe 4 von Blatt 6 gab es einige Aussagen, die sie (hoffentlich) nicht zeigen konnten. Wir wollen jetzt genauer verstehen, warum. Zeigen Sie folgendes; dabei dürfen Sie beide gödelsche Unvollständigkeitssätze und auch den Satz von Löb verwenden.

(a) Wenn die Aussage

$$\text{„Wenn ZFC} \models \beta(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \text{ wahr ist, ist ZFC inkonsistent.“}$$

wahr ist, dann ist ZFC inkonsistent.

(b) Falls ZFC konsistent ist, lässt sich die Aussage

$$\text{„Wenn ZFC inkonsistent ist, gilt } 0 = 1.\text{“}$$

nicht in ZFC beweisen.

(c) Die Aussage

$$\text{„Für alle } L_{\mathrm{Me}}\text{-Aussagen } \phi \text{ und } \psi \text{ gilt: Wenn } (\mathrm{ZFC} \models \phi) \Rightarrow (\mathrm{ZFC} \models \psi) \text{ gilt, dann auch ZFC} \models (\phi \to \psi).\text{“}$$

ist falsch.

Nachtrag: Bei (c) sollte es heißen: Ist ZFC konsistent, so ist die Aussage... falsch.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Auf der Insel der Ritter und Schurken gibt es Ritter, die immer die Wahrheit sagen und Schurken, die immer lügen. Bei seinem Urlaub auf dieser Insel fängt sich Herr Gödel eine Krankheit ein. Ein Schamane (Herr Gödel weiß, dass es sich um einen Ritter oder einen Schurken handelt) sagt ihm: „Wenn Sie glauben, dass ich ein Ritter bin, werden Sie gesund werden.“

Herr Gödel ist etwas verwirrt und weiß gar nicht so recht, was er jetzt glaubt. Deswegen geht er nach seinem Urlaub zu seinem Hausarzt, von dem er weiß, dass er immer die Wahrheit sagt. Der Hausarzt verabreicht ihm ein Medikament[1] und sagt: „Wenn Sie glauben, dass Sie gesund werden werden, dann werden Sie gesund werden.“

Da weiß Herr Gödel, dass er gesund werden wird. (a) Warum? Und (b) was hat das mit dem Satz von Löb zu tun?

Um die Aufgabe präziser zu formulieren, verwenden wir folgende Notationen: „$G \vdash \phi$“ bedeutet: „Herr Gödel weiß, dass ϕ gilt“; „$\Box\phi$“ bedeutet: Herr Gödel glaubt, dass ϕ gilt. Herr Gödel weiß natürlich, dass Tautologien wahr sind, und er kann auch den Modus Ponens anwenden. Über seinen Glauben lässt sich sagen:

(a) Wenn er weiß, dass ϕ wahr ist, dann weiß er auch, dass er ϕ glaubt: $G \vdash \phi \Rightarrow G \vdash \Box\phi$

(b) Herr Gödel weiß, dass er an den Modus Ponens glaubt: $G \vdash (\Box\phi \land \Box(\phi \to \psi)) \to \Box\psi$

[1] Es handelt sich wohl um ein Placebo...

(c) Herr Gödel weiß: Wenn er etwas glaubt, dann glaubt er auch, dass er es glaubt: $G \vdash \Box\phi \to \Box\Box\phi$

Hinweis: Der Beweis des Satzes von Löb hat Ähnlichkeiten mit dem Beweis des zweiten gödelschen Unvollständigkeitssatzes.