Einf. in die Logik/Modelltheorie Probeklausur

(Lösungsideen)

A1) $\phi(x,y) = \exists^{=1} z : x < z < y$.

Das müssen wir jetzt noch ohne Abkürzungen schreiben:

$$\phi(x,y) = \exists z : \big(x < z \wedge z < y \wedge \neg \exists w : (x < w \wedge w < y \wedge \neg(w = z)) \big)$$

A2) $T = \{ \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \in T_1, \varphi_2 \in T_2 \}$.

Dann ist $\mathcal{M} \models T_1 \Rightarrow \mathcal{M} \models T$ und analog $\mathcal{M} \models T_2 \Rightarrow \mathcal{M} \models T$ sofort klar. Für die andere Richtung sei $\mathcal{M} \models T$. Falls $\mathcal{M} \not\models T_2$, so gibt es ein $\psi_2 \in T_2$ mit $\mathcal{M} \not\models \psi_2$. Aus $\mathcal{M} \models T$ folgt insbes. $\mathcal{M} \models \varphi_1 \vee \psi_2$ für alle $\varphi_1 \in T_1$, wegen $\mathcal{M} \not\models \psi_2$ ergibt sich $\mathcal{M} \models \varphi_1$ für alle $\varphi_1 \in T_1$. Also $\mathcal{M} \models T_1$.

A3| I.A.: Für $n=0$ ist $X_n = \emptyset$, also ist $Abb(X_n, X_n) = \{\emptyset\}$ d.h. die Beh. ist erfüllt.

I.S.: Sei $f \in Abb(X_{s(n)}, X_{s(n)})$ injektiv.

1. Fall. $n \notin im(f|_{X_n})$.

Dann ist $f|_{X_n} \in Abb(X_n, X_n)$ injektiv, also nach I.V. surjektiv. Da f injektiv ist kann $f(n)$ nicht in X_n liegen, d.h. $f(n) = n$. Also ist auch f surjektiv.

2. Fall. $n \in im(f|_{X_n})$, etwa $f(m) = n$, $m \in X_n$.

Betrachte $g \in Abb(X_n, X_n)$ mit $g(m) = f(n)$ und $g(m') = f(m')$ für $m' \in X_n \setminus \{m\}$.

(Beachte dass $f(n) \neq n \neq f(m')$, da f inj und $f(m) = n$.)

Dann ist g injektiv (da f injektiv ist), also nach I.V. surjektiv. Nun ist $im(f) = im(g) \cup \{n\} = X_{s(n)}$, also auch f surj.

A4) Ang. die Menge

$$M = \{ \beta \in \alpha \mid \forall n \in \mathbb{N}: f^n(\beta) \neq 0 \} \subseteq \alpha$$

wäre nicht leer. Dann sei $\beta_0 := \min(M)$.

Es ist $\beta_0 \neq 0$ (sonst wäre $f^0(\beta_0) = 0$, also $\beta_0 \notin M$), d.h. $f(\beta_0) < \beta_0$, also $f(\beta_0) \notin M$ d.h. $f^n(f(\beta_0)) = 0$ für ein n.

Dann aber $f^{n+1}(\beta_0) = f^n(f(\beta_0)) = 0$, also $\beta_0 \notin M$ ↯.

A5) Nach Def. ist $\kappa^{\mu_1} \cdot \kappa^{\mu_2} = |Abb(X_1, \kappa) \times Abb(X_2, \kappa)|$ und $\kappa^{\mu_1 + \mu_2} = |Abb(X_1 \cup X_2, \kappa)|$ für zwei disjunkte Mengen X_1, X_2 mit $|X_1| = \mu_1$, $|X_2| = \mu_2$.

Nun ist

$$(f,g) \longmapsto f \cup g$$

eine Bijektion von $Abb(X_1, \kappa) \times Abb(X_2, \kappa)$ nach $Abb(X_1 \cup X_2, \kappa)$ (denn $h \mapsto (h|_{X_1}, h|_{X_2})$ ist eine Umkehrabbildung), also gilt

$$\kappa^{\mu_1} \cdot \kappa^{\mu_2} = \kappa^{\mu_1 + \mu_2}$$

A6. Angenommen, es gäbe eine solche Formel $\phi(x)$.

Sei $L = L_{mgrp} \cup \{c\}$ ← neues Konst.symb. und

$$T = \{\text{Gruppenaxiome}\} \cup \{\phi(c)\}$$
$$\{c^n \neq 1 \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Dann hat jede endl. Teilmenge $T_0 \subseteq T$ ein Modell!
etwa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein n größer als alle die in den Formeln "$c^n \neq 1$" $\in T_0$ auftauchen, $c = 1$.
Also ist auch T konsistent (nach dem Kompaktheitssatz).
Das heißt aber: Es gibt eine Gruppe G mit einem Element $a = c^G$ für das $G \models \phi(a)$ und $G \models a^n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. Also war $\phi(x)$ doch nicht wie gefordert.

A7 Betrachte $T = \mathrm{Th}_{L_{ring}}(\mathbb{Q}) \cup \{ c > \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}} \mid n \in \mathbb{N} \}$

in der Sprache $L = L_{ring} \cup \{ c \}$. neues Konst.symb.

Nach dem Kompaktheitssatz hat T ein Modell Q', da $\mathbb{Q}$ mit hinreichend groß gewähltem $c^{\mathbb{Q}}$ jeweils Modell von endl. Teilmengen von T ist.

Nach Löwenheim-Skolem gibt es ein $Q \equiv_L Q'$ mit $\# Q = \aleph_0$. Nun ist $Q \equiv_{L_{ring}} Q' \equiv_{L_{ring}} \mathbb{Q}$,

aber $Q \equiv_L Q' \not\equiv_L \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{egal, wie wir } c^{\mathbb{Q}} \text{ wählen!}}$.

Insbesondere sind $\mathbb{Q}$ und Q nicht isomorph.

A8

Sei $\phi(\underline{x}) = \exists y : \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i(\underline{x}, y)$

wobei jedes $\phi_i(\underline{x}, y)$ eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel ist.

Wir müssen zeigen, dass $\phi(\underline{x})$ zu einer q.f. Formel äquivalent ist (modulo T). o.E. kommt dabei y in jedem $\phi_i(\underline{x}, y)$ auch tatsächlich vor.

Falls $\phi_i(\underline{x}, y) = y \doteq x_j$ für ein j

oder $\phi_i(\underline{x}, y) = y \doteq c$ für ein Konst.symb. c

für ein i gilt, ersetze y überall durch x_j bzw. c und lasse "$\exists y$" weg.

Ansonsten kommen nur Formeln der Form

$y \neq x_j$ und $y \neq c$ vor, da jedes Modell von T unendlich ist, ist $\phi(\underline{x})$ dann modulo T äquivalent zu "$\top$"