Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

0. Aufgabenblatt — 20.04.2017 / keine Abgabe

Übungsaufgabe 0.1 (Die Fourier-Transformation) Für $p \in [1, \infty]$ sei $L_p(\mathbb{R}^n) := L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $n \geqslant 1$.
Der ***Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen*** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist definiert als

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \,:\, q_{k,m}(f) := \sup_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Lambda^k(x) |\partial^\alpha f(x)| < \infty \ \ \forall\, k, m \in \mathbb{N} \Big\},$$

wobei $\Lambda(x) := (1 + |x|^2)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$, und in $C_0(\mathbb{R}^n)$, wobei $C_0(\mathbb{R}^n) := C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ der Banachraum der Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, ist. Die Abbildung

$$d(f, g) := \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+m}} \frac{q_{k,m}(f-g)}{1 + q_{k,m}(f-g)}, \qquad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

definiert eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Eine Folge $(f_l)_l$ konvergiert gegen f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $q_{k,m}(f_l - f) \to 0$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$.
Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist ***Fourier-Transformierte*** $\mathcal{F}f$ von f definiert durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

bzw. die ***inverse Fourier-Transformierte*** $\mathcal{F}^{-1}f$ von f ist definiert durch

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $x\xi := \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$. Man kann zeigen, dass:

(a) $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind linear, stetig, und invertierbar. Die Inverse von $\mathcal{F}$ ist die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$.

(b) ***Riemann-Lebesgue*** $\quad \mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n))$.

(c) ***Plancherel*** $\quad \mathcal{F}$ besitzt eine Erweiterung $\mathcal{F} \in \mathrm{Isom}(L_2(\mathbb{R}^n))$ und

$$\langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle_2 = \langle f | g \rangle_2, \qquad f, g \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ das Skalarprodukt auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist (anders gesagt $\mathcal{F}$ ist ein unitärer Operator). Die Inverse von $\mathcal{F}$ stimmt mit der inversen Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ auf $L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ überein.

Beweisen Sie **(b)**.

Übungsaufgabe 0.2 Es seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f$, wobei $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$ ist.

(b) $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}f$.

Übungsaufgabe 0.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ der ***Raum der lokal integrierbaren Funktionen***, d.h.

$$L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,:\, f\chi_K \in L_1(\Omega) \text{ für jede kompakte Menge } K \subset \Omega\},$$

wobei χ_K die charakteristische Funktion der Menge K ist.
Für $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ist die ***schwache*** α***-te partielle Ableitung von*** f definiert (falls es existiert) als die eindeutige Funktion $\partial^\alpha f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha f \varphi \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei $C_0^\infty(\Omega)$ der ***Raum der Testfunktionen*** ist:

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \,:\, \operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \,:\, \varphi(x) \neq 0\}} \text{ kompakt in } \Omega \text{ ist}\}.$$

Dann liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$ und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ ist $W_p^k(\Omega) := W_p^k(\Omega, \mathbb{C})$ der L_p-***Sobolevraum***:

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) \,:\, \partial^\alpha f \in L_p(\Omega) \text{ für jedes } |\alpha| \leqslant k\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $W_p^k(\Omega)$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W_p^k} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_p^p\right)^{1/p} & , \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_\infty & , \quad p = \infty \end{cases}$$

ist ein Banachraum und $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$.

(b) $W_2^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Übungsaufgabe 0.4
Für jedes $s \in [0, \infty)$ ist der ***Sobolevraum*** (über L_2 der Ordnung s) $H^s(\mathbb{R}^n)$ definiert als

$$H^s(\mathbb{R}^n) := H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) \,:\, \Lambda^s \mathcal{F} u \in L_2\}$$

und wir versehen ihn mit dem Skalarprodukt

$$\langle u | v \rangle_{H^s} := \langle \Lambda^s \mathcal{F} u | \Lambda^s \mathcal{F} v \rangle_2 \qquad \text{für } u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Beweisen Sie:

(a) $\left(H^s(\mathbb{R}^n), \langle \cdot | \cdot \rangle_{H^s}\right)$ ist ein Hilbertraum und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sind $u, \partial_j u \in L_2(\mathbb{R})$ für ein $1 \leqslant j \leqslant n$, so gilt $\mathcal{F}(\partial_j u) = i\xi_j \mathcal{F} u$.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $H^k(\mathbb{R}^n) = W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere impliziert **(b)**, dass $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F} u$ für alle $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha| \leqslant k$.

(d) ***Sobolevscher Einbettungssatz***: Für $s > n/2$ gilt $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$.

(Hinweise: Zu **(b)**: Übungsaufgabe **0.2 (a)**. Zu **(c)**: Zeigen Sie, dass

$$u \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u \in H^k(\mathbb{R}^n).$$

Zu **(d)**: Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} u \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und verwenden Sie $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ unter Betrachtung von Übungsaufgabe **0.1 (b)**.)