Dr. Bogdan Matioc

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

1. Aufgabenblatt — 20.04.2017 / Abgabe 27.04.2017

Übungsaufgabe 1.1 Es sei $\mathbb{E}$ ein Banachraum, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f \in C((a,b),\mathbb{E})$ und $g \in C((a,b),\mathbb{R})$ mit

$$\|f(x)\| \leqslant g(x) \qquad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Zeigen Sie: Ist g uneigentlich Riemann integrierbar, so ist auch f uneigentlich Riemann integrierbar und

$$\Big\| \int_a^b f(x)\,dx \Big\| \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Übungsaufgabe 1.2 Seien $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1$ zwei $\mathbb{K}$-Banachräume, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f \in C((a,b),\mathbb{E}_1)$ und man nehme an, dass

$$f : (a,b) \to \mathbb{E}_1 \qquad \text{und} \qquad Af : (a,b) \to \mathbb{E}_0$$

uneigentlich integrierbar sind.
Zeigen Sie, dass

$$A \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Af(t)\,dt.$$

Übungsaufgabe 1.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathbb{E}$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum, und $f : \Omega \to \mathbb{E}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist holomorph.

(b) f ist ***schwach holomorph*** d.h. $\varphi \circ f$ ist holomorph für jedes $\varphi \in \mathbb{E}'$.

(c) f ist stetig und für jeden nullhomologen Zyklus Γ in Ω gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

(d) f ist stetig und für jeden nullhomologen Zyklus Γ in Ω gilt

$$w(\Gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \qquad \forall z_0 \in \Omega \setminus \Gamma,$$

wobei $w(\Gamma, z_0)$ die Windungszahl von Γ bzgl. z_0 ist.

(e) Für jedes $z_0 \in \Omega$ existieren $r > 0$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit absolute konv. in } \mathbb{E} \text{ für alle } |z - z_0| < r.$$

(Hinweis zu **(b)** $\Longrightarrow$ **(c)+(d)**: Satz 2.2 (Banach-Steinhaus) aus der Vorlesung.)

Übungsaufgabe 1.4 Es seien $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1$ zwei $\mathbb{C}$-Banachräume mit $\mathbb{E}_1 \hookrightarrow \mathbb{E}_0$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$. Die ***Resolvente*** $\rho(A)$ von A ist die Menge

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : E_1 \to \mathbb{E}_0 \text{ ist invertierbar}\}$$

Zeigen Sie:

(a) $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$: Ist $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)}},$$

so folgt $\lambda \in \rho(A)$.

(b) Die Resolventenabbildung

$$[\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}] : \rho(A) \to \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$$

ist holomorph.