Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

10. Aufgabenblatt — 06.07.2017 / Abgabe 13.07.2017

Übungsaufgabe 10.1

(a) Sei $\mathbb{E}$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}$ ein Banachraum ist genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{E}$ auch konvergent ist.

(b) Sei $\mathbb{E}$ ein Banachraum und $\mathbb{F}$ ein abgeschlossener UVR von $\mathbb{E}$. Zeigen Sie, dass der ***Quotientenraum***

$$\mathbb{E}/\mathbb{F} := \big\{[x] := x + \mathbb{F} \,:\, x \in \mathbb{E}\big\}$$

ein Banachraum ist mit der Norm

$$\|[x]\| := \inf_{y\in\mathbb{F}} \|x - y\|.$$

Übungsaufgabe 10.2 Wir definieren

$$\mathcal{P}_{\mathbb{K}} := \big\{(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1) \,:\, (\mathbb{E}_i, \|\cdot\|_i),\ i \in \{0,1\}, \text{ ist } \mathbb{K}\text{-Banachraum und } \mathbb{E}_1 \overset{d}{\hookrightarrow} \mathbb{E}_0\big\}, \qquad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Sei $\theta \in (0,1)$, $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, und $S := [0 < \operatorname{Re} z < 1] \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{F}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1) := \Big\{ f \,:\, f : S \to \mathbb{E}_0 \text{ ist holomorph, } f \in BC(\overline{S}, \mathbb{E}_0), \\ [t \mapsto f(it)] \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}_0),\ [t \mapsto f(1+it)] \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}_1)\Big\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \max\Big\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_0, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_1\Big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{G} := \big\{f \in BC(\overline{S}, \mathbb{E}_0) \,:\, f : S \to \mathbb{E}_0 \text{ ist holomorph}\big\}$ ist ein abgeschlossener UVR des Banachraums $BC(\overline{S}, \mathbb{E}_0)$.

(b) $\mathcal{F}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$ ist ein Banachraum.

(c) Für jedes $\theta \in (0,1)$ ist $\mathcal{N}_\theta := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1) \,:\, f(\theta) = 0\}$ ein abgeschlossener UVR von $\mathcal{F}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$.

(Hinweise: Zu **(a)**: Übungsaufgabe **1.3** und der weierstraßsche Konvergenzsatz. Zu **(b)**: Verwenden Sie, das ***Drei-Linien-Theorem*** von Hadamard: Für eine holomorphe Funktion $f : S \to \mathbb{C}$ mit $f \in BC(\overline{S}, \mathbb{C})$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\alpha + it)| \leqslant \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(it)|_0\big)^{1-\alpha} \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(1+it)|\big)^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1),$$

um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_{BC(\overline{S},\mathbb{E}_0)} \leqslant C\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ für ein $C > 0$.)

Übungsaufgabe 10.3 Mit der Notation aus Übungsaufgabe **10.1** definieren wir für jedes $\theta \in (0,1)$ ist der ***komplexe Interpolationsraum*** $\mathbb{E}_\theta := [\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1]_\theta$ definiert durch

$$[\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1]_\theta := \big\{ f(\theta) \,:\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1) \big\}, \qquad \|x\|_\theta := \inf_{f \in \mathcal{F}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1),\, f(\theta)=x} \|f\|_{\mathcal{F}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1)}.$$

Zeigen Sie:

(a) $[\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1]_\theta$ ist ein Banachraum für jedes $\theta \in (0,1)$.

(b) Ist $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_1 =: \mathbb{E}$, so gilt $[\mathbb{E}, \mathbb{E}]_\theta = \mathbb{E}$ mit identischen Normen.

(c) Für $0 < \theta < 1$ gilt: $\mathbb{E}_1 \hookrightarrow \mathbb{E}_\theta \hookrightarrow \mathbb{E}_0$.

(Hinweis zu **(a)**: Übungsaufgabe **10.1 (b)**.)

Übungsaufgabe 10.4 Sei $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1), (\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1) \in \mathcal{P}_\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{F}_0) \cap \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{F}_1)$, und $\theta \in (0,1)$. Dann ist $T \in \mathcal{L}([\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1]_\theta, [\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1]_\theta)$ und

$$\|T\|_{\mathcal{L}([\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1]_\theta,[\mathbb{F}_0,\mathbb{F}_1]_\theta)} \leqslant \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}((\mathbb{E}_0,\mathbb{F}_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{F}_1)}.$$

(Hinweis: Für $x \in \mathbb{E}_\theta$ und $f \in \mathcal{F}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$ mit $f(\theta) = x$ betrachte (falls der Quotient definiert und nicht 0 ist) die Funktion

$$g(z) = \left(\frac{\|T\|_{\mathcal{L}((\mathbb{E}_0,\mathbb{F}_0)}}{\|T\|_{\mathcal{L}((\mathbb{E}_1,\mathbb{F}_1)}} \right)^{z-\theta} Tf(z), \qquad z \in \overline{S}.)$$