HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Dr. Bogdan Matioc

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

11. Aufgabenblatt — 13.07.2017 / Abgabe 20.07.2017

Übungsaufgabe 11.1 Sei $\theta \in (0,1)$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$. Für $x \in \mathbb{E}_0$ und $t > 0$ sei

$$K(t, x, \mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1) := K(t, x) := \inf\{\|a\|_0 + t\|b\|_1 \,:\, x = a + b,\ a \in \mathbb{E}_0,\ b \in \mathbb{E}_1\}.$$

Die ***stetigen Interpolationsräume*** $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta := (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)^0_{\theta,\infty}$ sind definiert durch

$$(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty} := \big\{x \in \mathbb{E}_0 \,:\, [t \mapsto t^{-\theta}K(t,x)] \in L_\infty((0,\infty))\big\},$$
$$(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta := \big\{x \in (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty} \,:\, \lim_{t\to 0} t^{-\theta}K(t,x) = 0\big\},$$

und sind versehen mit der Norm

$$\|x\|_\theta := \|[t \mapsto t^{-\theta}K(t,x)]\|_{L_\infty((0,\infty))}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $x,\ y \in \mathbb{E}_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, und $t > 0$ gelten

$$\begin{cases} (i) & \min\{1,t\}\, K(1,x) \leqslant K(t,x) \leqslant \max\{1,t\}\, K(1,x), \\ (ii) & K(t,x) \leqslant \|x\|_0, \\ (iii) & K(t, x+y) \leqslant K(t,x) + K(t,y), \\ (iv) & K(t, \lambda x) = |\lambda| K(t,x). \end{cases}$$

(b) $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ ist ein normierter Vektorraum.

(c) $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$.

Übungsaufgabe 11.2 Seien $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta$ definiert in Übungsaufgabe **11.1**. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}_1 \hookrightarrow (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta \hookrightarrow (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty} \hookrightarrow \mathbb{E}_0$.

(b) Für $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ gilt $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta_2} \hookrightarrow (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta_2,\infty} \hookrightarrow (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta_1} \hookrightarrow (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta_1,\infty}$.

(c) Ist $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}_1 =: \mathbb{E}$, so gilt $K(t,x) = \min\{1,t\}\,\|x\|$ und $(\mathbb{E}, \mathbb{E})_{\theta,\infty} = (\mathbb{E}, \mathbb{E})_\theta = \mathbb{E}$ mit identischen Normen.

Übungsaufgabe 11.3

(a) Seien $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta$ definiert in Übungsaufgabe **11.1**. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ und $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta$ Banachräume sind.

(b) Sei $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)$, $(\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{F}_0) \cap \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{F}_1)$. Zeigen Sie, dass

$$T \in \mathcal{L}((\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}, (\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1)_{\theta,\infty}) \cap \mathcal{L}((\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta, (\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1)_\theta)$$

mit

$$\|T\|_{\mathcal{L}((\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1)_{\theta,\infty},(\mathbb{F}_0,\mathbb{F}_1)_{\theta,\infty})} \leqslant \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}((\mathbb{E}_0,\mathbb{F}_0)}\|T\|^\theta_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{F}_1)}.$$

Übungsaufgabe 11.4 (Reiterations-Theorem: Eine Inklusion) Sei $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 1$, $\mathbb{E}_{\theta_i} := (\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta_i}$, $i = 1, 2$, und $\eta \in (0,1)$. Zeigen Sie:

$$(\mathbb{E}_{\theta_1} \mathbb{E}_{\theta_2})_\eta \hookrightarrow \mathbb{E}_{(1-\eta)\theta_1 + \eta\theta_2}.$$

(Beachte: Man kann zeigen, dass $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_\theta$ der Abschluss von $\mathbb{E}_1$ in $(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1)_{\theta,\infty}$ ist für $\theta \in (0,1)$, und deshalb gilt $(\mathbb{E}_{\theta_1} \mathbb{E}_{\theta_2}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$. Allerdings spielt die Dichtheit in den Übungsaufgaben **11.1-11.4** keine Rolle.)