Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

12. Aufgabenblatt — 20.07.2017 / Abgabe 27.07.2017

Übungsaufgabe 12.1 Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist die ***Hilbert-Transformierte*** $\mathcal{H}f$ von f definiert durch

$$\mathcal{H}f(x) := \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|y|<\varepsilon^{-1}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}f$ ist wohl-definiert.

(b) $\mathcal{H}(\tau_a f) = \tau_a \mathcal{H}f$, $a \in \mathbb{R}$, und $d_\lambda \mathcal{H}f = \mathcal{H}(d_\lambda f)$, $\lambda > 0$, wobei

- $\tau_a f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch $\tau_a f(x) := f(x-a)$, bzw.
- $d_\lambda f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch $d_\lambda f(x) := f(x\lambda)$ definiert sind.

Übungsaufgabe 12.2

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{|x|\to\infty} x\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(b) $\mathcal{H}$ bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$.

(Hinweis zu **(a)**: Für $x \neq 0$ gilt

$$\pi\mathcal{H}f(x) = \int_{0<|y|<|x|/2} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,dy + \int_{|x|/2<|y|<2|x|} \frac{f(x-y)}{y}\,dy + \int_{2|x|<|y|} \frac{f(x-y)}{y}\,dy.$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{|x|/2<|y|<2|x|} f(x-y)\frac{x}{y}\,dy - \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,dy = \int_{|x|/2<|y|<2|x|} f(x-y)\Big(\frac{x}{y}-1\Big)\,dy - \int_{|y|<|x|/2} f(x-y)\,dy$$
$$- \int_{|y|>2|x|} f(x-y)\,dy \to_{|x|\to\infty} 0.)$$

Übungsaufgabe 12.3 Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$C_\varepsilon f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y-i\varepsilon}\,dy.$$

Zeigen Sie:

(a)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = f(0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{xf(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = -\mathcal{H}f(0).$$

(b)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon f(x) = \frac{f(x) - i\mathcal{H}f(x)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis zu **(a)**: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\,dx = \pi$. Hinweis zu **(b)**: Wegen **Übungsaufgabe 12.1(b)** reicht es die Aussage für $x = 0$ zu beweisen.)

Übungsaufgabe 12.4 Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Für $\varepsilon > 0$ sei

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $f_\varepsilon \to_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}f$ in $L_2(\mathbb{R})$.

(b) Für $\varepsilon > 0$ sei

$$D_\varepsilon f := C_\varepsilon f - \frac{f - if_\varepsilon}{2}$$

und

$$h(u) := \frac{1}{u-i} - \frac{\chi_{[|u|>1]}(u)}{u}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(i) $h \in L_1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} h(u)\,du = i\pi.$$

(ii)

$$D_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} (\tau_{\varepsilon u} f - f)(x) h(u)\,du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) $D_\varepsilon f \to_{\varepsilon\to 0} 0$ in $L_2(\mathbb{R})$.

(c) Für $R > \varepsilon > 0$ sei

$$C_{\varepsilon,R} f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|y|<R} \frac{f(x-y)}{y - i\varepsilon}\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $C_{\varepsilon,R} f \in L_1(\mathbb{R})$ und $C_{\varepsilon,R} f \to_{R\to\infty} C_\varepsilon f$ in $L_2(\mathbb{R})$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}(C_{\varepsilon,R} f)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|<R} \frac{e^{-it\xi}}{t - i\varepsilon}\,dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\mathcal{F}(C_\varepsilon f)(\xi) = 0$ für fast alle $\xi > 0$.

(iv) $\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(\xi) = -i\,\mathrm{sign}\,(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$.

(Hinweis zu **(a), (b)**: Die Minkowskische Ungleichung. Hinweis zu **(c)**: Mit

$$g_\varepsilon(t) := \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t - i\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad g_{\varepsilon,R}(t) := \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t - i\varepsilon}\chi_{[|t|<R]}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gilt $C_{\varepsilon,R} f - C_\varepsilon f = (g_{\varepsilon,R} - g_\varepsilon) * f$.)