Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

2. Aufgabenblatt — 27.04.2017 / Abgabe 04.05.2017

Übungsaufgabe 2.1 Sei $A := d/dx$ und $\mathbb{E}_0 := C([0,1],\mathbb{C})$. Beweisen Sie:

(a) Ist $\mathbb{E}_1 := C^1([0,1],\mathbb{C})$, so gilt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)$ und $\rho(A) = \emptyset$.

(b) Ist $\mathbb{E}_1 := \{u \in C^1([0,1],\mathbb{C}) \,:\, u(0) = 0\}$, so gilt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)$ und $\sigma(A) = \emptyset$.

(c) Zeigen Sie, dass es sich weder bei **(a)** noch bei **(b)** um einen sektoriellen Operator handelt.

(Hinweis: Versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^1} := \max_{0 \leqslant k \leqslant 1} \|u^{(k)}\|_\infty$$

ist $\mathbb{E}_1$ ein Banachraum.)

Übungsaufgabe 2.2 Es seien $(\mathbb{E}_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 0,1$, reelle Banachräume und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}_j^c := \mathbb{E}_j + i\mathbb{E}_j = \{x + iy \,:\, u, v \in \mathbb{E}_j\}$, versehen mit der Norm

$$\|x + iy\|_{j,c} := \max_{-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi} \|x \cos\vartheta + y \sin\vartheta\|_j, \qquad j = 0,1,$$

ist $\mathbb{C}$-Banachraum.

(b) Die Einbettung $\mathbb{E}_j \hookrightarrow \mathbb{E}_j^c$ ist eine Isometrie, d.h. $\|x\|_{j,c} = \|x\|_j$ für alle $x \in \mathbb{E}_j$, $j = 0,1$.

(c) Die ***Komplexifiezierung*** $A^c : \mathbb{E}_1^c \to \mathbb{E}_0^c$,

$$A^c(x + iy) := Ax + iAy, \qquad x + iy \in \mathbb{E}_1^c,$$

von A erfüllt $A^c \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1^c,\mathbb{E}_0^c)$ und $\|A^c\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1^c,\mathbb{E}_0^c)} = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)}$. Ist ferner $\lambda - A^c : \mathbb{E}_1^c \to \mathbb{E}_0^c$ invertierbar für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda - A : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_0$ invertierbar.

(d) Ist $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum, so definiert $\|x + iy\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ i.A. keine Norm auf $\mathbb{E}^c$.

Übungsaufgabe 2.3 Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, und

$$C^k(\mathbb{S},\mathbb{K}) := \{u \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{K}) \,:\, u \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

sei versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k} := \max_{0 \leqslant p \leqslant k} \|u^{(p)}\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $(C^k(\mathbb{S},\mathbb{R}))^c$ und $C^k(\mathbb{S},\mathbb{C})$ isomorph sind (Notation $(C^k(\mathbb{S},\mathbb{R}))^c \doteq C^k(\mathbb{S},\mathbb{C})$).

Übungsaufgabe 2.4 Es seien $(\mathbb{E}_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 0, 1$, $\mathbb{K}$-Banachräume mit $\mathbb{E}_1 \overset{d}{\hookrightarrow} \mathbb{E}_0$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$, und nehme an, dass $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0, \kappa, \omega)$ (bzw. $A^c \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1^c, \mathbb{E}_0^c, \kappa, \omega)$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$[x \mapsto |||x||| := \|x\|_0 + \|Ax\|_0] : \mathbb{E}_1 \to [0, \infty)$$

eine Norm auf $\mathbb{E}_1$ definiert, welche zu der $\|\cdot\|_1$-Norm äquivalent ist. Genauer, zeigen Sie dass es $C = C(\kappa, \omega) \geqslant 1$ gibt mit

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leqslant |||x||| \leqslant C\|x\|_1.$$

(b) Für $f : [0, T] \to \mathbb{E}_0$, $T > 0$, gilt

$$f \in C([0, T], \mathbb{E}_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f,\ Af \in C([0, T], \mathbb{E}_0).$$