Dr. Bogdan Matioc

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

3. Aufgabenblatt — 04.05.2017 / Abgabe 11.05.2017

Übungsaufgabe 3.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \left|1 - |x|\right|_+ := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in H^1(\mathbb{R})$ und berechnen Sie

$$(-\Delta)^{1/2} f := \mathcal{H} f',$$

wobei $\mathcal{H}$ die Hilbert-Transformation ist.
(Hinweis: **Übungsaufgabe 0.4**.)

Übungsaufgabe 3.2 Sei $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$. Beweisen Sie:

(a) $A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax$ für $x \in \mathbb{E}_1$ und $\lambda \in \rho(A)$.

(b) ***(Die Resolventen-Identität)***

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \qquad \forall \lambda, \mu \in \rho(A).$$

Übungsaufgabe 3.3

(a) Sei $\gamma := \gamma_{r,\eta}^{\omega} := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, $r > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, und $\eta \in (\pi/2, \pi)$, mit

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= \omega - s e^{-i\eta}, & -\infty < s \leqslant -r, \\ \gamma_2(s) &:= \omega + r e^{is}, & -\eta \leqslant s \leqslant \eta, \\ \gamma_3(s) &:= \omega + s e^{i\eta}, & r \leqslant s < \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie für $s > 0$ und $\lambda \notin \gamma$, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} \, d\mu = \begin{cases} e^{\lambda s} & , \text{ falls } \lambda \text{ links von } \gamma \text{ liegt}, \\ 0 & , \text{ falls } \lambda \text{ rechts von } \gamma \text{ liegt}. \end{cases}$$

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Halbgruppe für $A := [z \mapsto az] \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

Übungsaufgabe 3.4 Sei $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ und $\{T(t)\}_{t \geqslant 0} \subset \mathcal{L}(\mathbb{E}_0)$ die HG assoziiert zu A. Beweisen Sie:

(a) Der Operator $B := A - \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ ist sektoriell und die HG $\{S(t)\}_{t \geqslant 0} \subset \mathcal{L}(\mathbb{E}_0)$ assoziiert zu B erfüllt

$$S(t) = T(t) e^{-\mu t}, \qquad t > 0.$$

(b) Es gilt

$$(\lambda - A)^{-1} T(t) = T(t)(\lambda - A)^{-1} \qquad \text{für alle } \lambda \in \rho(A),\ t > 0.$$