Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

4. Aufgabenblatt — 11.05.2017 / Abgabe 18.05.2017

Übungsaufgabe 4.1 Es seien

$$\mathbb{E}_1 := C^2(\mathbb{S}, \mathbb{C}) := \{u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,:\, u \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\},$$

$$\mathbb{E}_0 := C(\mathbb{S}, \mathbb{C}) := \{u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,:\, u \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}.$$

Zeigen Sie, unter Verwendung des Beispiels 3.12 aus der Vorlesung, dass $\mathbb{E}_1$ dicht liegt in $\mathbb{E}_0$.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Lösung u_ε von $u_\varepsilon - \varepsilon^2 u_\varepsilon'' = f$ für $\varepsilon \searrow 0$ gegen f in $\mathbb{E}_0$ konvergiert.)

Übungsaufgabe 4.2 Sei $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ und $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(\mathbb{E}_0)$ die HG assoziiert zu A. Beweisen Sie:

(a) $A^k T(\cdot) \in C^\infty((0, \infty), \mathcal{L}(\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j))$, $i, j \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Für $x \in \mathbb{E}_0$ ist die Abbildung

$$[t \mapsto T(t)x] : (0, \infty) \to \mathbb{E}_1$$

glatt, d.h. $T(\cdot)x \in C^\infty((0, \infty), \mathbb{E}_1)$. Ist $x \in \mathbb{E}_1$, so gilt $[t \mapsto T(t)x] \in C([0, \infty), \mathbb{E}_1)$.

Übungsaufgabe 4.3 Sei $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$, $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(\mathbb{E}_0)$ die HG assoziiert zu A, und es gelte $T(t) \to_{t\to 0} I$ in $\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}_1 \doteq \mathbb{E}_0$.

Übungsaufgabe 4.4 Sei $A \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0)$ mit $\Sigma_{\theta,0} \subset \rho(A)$ und

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{\theta,0}.$$

Sei ferner $\mu > 0$, $0 < r < \mu$, $\eta \in (\pi/2, \theta)$, und $\gamma := \gamma^0_{r,\eta}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} \, d\lambda = (\mu - A)^{-1}.$$