

## Nichtlineare Evolutionsgleichungen Sommersemester 2017 5. Aufgabenblatt — 18.05.2017 / Abgabe 01.06.2017

### Übungsaufgabe 5.1

- (a) Sei  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein reeller Hilbertraum und

$$H^c = \{u + iv : u, v \in H\}$$

sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u + iv | z + iw \rangle_c := \langle u | z \rangle + \langle v | w \rangle + i \langle v | z \rangle - i \langle u | w \rangle.$$

Zeigen Sie, dass  $(H^c, \langle \cdot | \cdot \rangle_c)$  ein komplexer Hilbertraum ist.

- (b) Sei

$$H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \operatorname{Im} u = 0\}, \quad s \geq 0,$$

wobei  $H^s(\mathbb{R}^n) := H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  in Übungsaufgabe 0.4 eingeführt wurde. Zeigen Sie, dass  $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  ein abgeschlossener reeller Untervektorraum von  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ist, und dass die Komplexifizierung  $(H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))^c$  mit  $H^s(\mathbb{R}^n)$  übereinstimmt (mit gleichem Skalarprodukt).

### Übungsaufgabe 5.2

- (a) Sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Zeigen Sie, dass Funktion  $[x \mapsto x^\alpha] : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  **sublinear** ist, d.h.

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha \quad \text{für } a, b \geq 0.$$

- (b) Sei  $\mathbb{E}$  ein Banachraum,  $-\infty < a < b < \infty$ , und  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  mit  $\alpha < \beta$ . Zeigen Sie, dass  $C_\beta^\beta((a, b], \mathbb{E}) \hookrightarrow C_\alpha^\alpha((a, b], \mathbb{E})$ .

### Übungsaufgabe 5.3 Beweisen Sie Bemerkung 5.1 der Vorlesung.

### Übungsaufgabe 5.4 Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E} := C([0, 1], \mathbb{R})$ definiert durch $u(0) \equiv 0$ und

$$u(t)(x) := t^\alpha \sin \frac{x}{t} \quad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in [0, 1].$$

Zeigen Sie, dass

$$u \in C_\alpha^\alpha((0, T], \mathbb{E}) \cap C([0, 1], \mathbb{E}) \setminus C^\alpha([0, 1], \mathbb{E}).$$