Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

6. Aufgabenblatt — 01.06.2017 / Abgabe 08.06.2017

Übungsaufgabe 6.1

(a) Es seine $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$, $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$, $(\mathbb{G}, \|\cdot\|_{\mathbb{G}})$ Banachräume mit $\mathbb{E}, \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$. Beweisen Sie, dass der ***Durchschnitt*** $\mathbb{E}\cap\mathbb{F} := \{x : x \in \mathbb{E}\cap\mathbb{F}\}$ ***von*** $\mathbb{E}$ ***und*** $\mathbb{F}$ ein Banachraum ist mit der Norm

$$\|x\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} := \|x\|_{\mathbb{E}} + \|x\|_{\mathbb{F}}, \qquad x \in \mathbb{E}\cap\mathbb{F}.$$

(b) Sei $\mathbb{E}$ ein Banachraum, $T > 0$, $\alpha \in (0,1)$, und

$$\mathbb{F} := \left\{u \in C^1([0,T],\mathbb{E}) \,:\, u' \in C^\alpha_\alpha((0,T],\mathbb{E})\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ ein Banachraum ist mit der Norm

$$\|u\| := \|u\|_{B(\mathbb{E})} + \|u'\|_{C^\alpha_\alpha(\mathbb{E})}, \qquad u \in \mathbb{F}.$$

Übungsaufgabe 6.2

(a) Sei $\mathbb{E}$ ein Banachraum, $\tau < \infty$, und $u : [0,\tau) \to \mathbb{E}$ sei gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass u eine stetige Erweiterung auf $[0,\tau]$ besitzt.

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{dist}(\,\cdot\,, M) : X \to [0,\infty), \qquad \mathrm{dist}(x, M) = \inf_{m\in M} d(x,m)$$

Lipschitz-stetig ist und dass

$$\mathrm{dist}(x, M) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{M}.$$

Übungsaufgabe 6.3 Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ Banachräume, $\mathcal{O} \subset \mathbb{E}$ offen, und $A \in C^{2-}(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G}))$. Zeigen Sie, dass

$$[(u,v) \mapsto A(u)[v]] =: B \in C^{2-}(\mathcal{O}\times\mathbb{F}, \mathbb{G}).$$

Übungsaufgabe 6.4 Für $u \in H^s(\mathbb{R})$ mit $s \in (3/2, 2]$ sei $A(u) \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$A(u)[v] := \frac{v''}{1+u'^2}, \qquad v \in H^2(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass

$$A \in C^{2-}(H^s(\mathbb{R}), \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R}))) \qquad \text{und} \qquad [u \mapsto A(u)[u]] \in C^{2-}(H^2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})).$$