Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

7. Aufgabenblatt — 08.06.2017 / Abgabe 22.06.2017

Übungsaufgabe 7.1 Sei $\varepsilon > 0$ und $x_j := j\varepsilon$ für $j \in \mathbb{Z}$. Sei ferner $I_j := (x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$, und $\pi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ mit $\operatorname{supp} \pi \subset (-1, 1)$ und $\pi = 1$ auf $[-1/2, 1/2]$. Für $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$\pi_j(x) := \frac{\pi((x - x_j)/\varepsilon)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi((x - x_k)/\varepsilon)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie:

(a) π_j ist wohl-definiert, $\pi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, und $\operatorname{supp} \pi_j \subset I_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \pi_j(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C(k) > 0$ mit $\|\pi_j^{(k)}\|_{B(\mathbb{R})} \leqslant C(k)/\varepsilon^k$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Die Familie $\{(\pi_j, I_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ heißt ***glatte ε-Zerlegung der Eins auf*** $\mathbb{R}$.

(ii) Sei nun $N := N(\varepsilon) := [1/\varepsilon^2] + 2 \in \mathbb{N}$, wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer ist. Ist $\{(\pi_j, I_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die glatte $\varepsilon-$Zerlegung der Eins aus (i), so definieren wir eine ***glatte endliche ε-Zerlegung der Eins***

$$\{(\Pi_j, J_j)\}_{-N\leqslant j\leqslant N+1}$$

auf $\mathbb{R}$ durch

$$\Pi_j = \pi_j, \quad J_j := I_j \quad |j| \leqslant N, \qquad \text{bzw.} \qquad \Pi_{N+1} := \sum_{|k|\geqslant N+1} \pi_k, \quad J_{N+1} := [|x| \geqslant x_N].$$

Zeigen Sie, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C(k) > 0$ existiert mit $\|\Pi_j^{(k)}\|_{B(\mathbb{R})} \leqslant C(k)/\varepsilon^k$ für alle $-N \leqslant j \leqslant N + 1$.

(iii) Sei $\{(\pi_j, I_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die glatte $\varepsilon-$Zerlegung der Eins aus (i) und

$$\chi_j = \pi_{j-1} + \pi_j + \pi_{j+1}, \quad |j| \leqslant N, \qquad \text{bzw.} \qquad \chi_{N+1} := \sum_{|k|\geqslant N} \pi_k.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ und $\chi_j = 1$ auf $\operatorname{supp} \Pi_j$, $-N \leqslant j \leqslant N + 1$.

(b) $|\operatorname{supp} \chi_j| \leqslant 4\varepsilon$ für $|j| \leqslant N$, bzw. $\operatorname{supp} \chi_{N+1} \subset [1/\varepsilon \leqslant |x|]$.

Übungsaufgabe 7.2 Sei $\{\Pi_j\}_{-N\leqslant j\leqslant N+1}$ auf $\mathbb{R}$ eine endliche glatte Zerlegung der Eins und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\left[u \mapsto \sum_{j=-N}^{N+1} \|\Pi_j u\|_{H^k}\right] : H^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to [0, \infty)$$

eine Norm auf $H^k(\mathbb{R})$ definiert, welche äquivalent ist zu der H^k-Norm.

Übungsaufgabe 7.3 Sei $\eta \geqslant 1$. Für $\overline{a} \in [1/\eta, \eta]$ sei $A_{\overline{a}} \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ definiert durch

$$A_{\overline{a}}u := \overline{a}u''.$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{(a)} \quad [\operatorname{Re}\lambda \geqslant 1] \subset \rho(A_{\overline{a}})$$

$$\text{(b)} \quad 2\eta\|(\lambda - A_{\overline{a}})u\|_2 \geqslant |\lambda|\|u\|_2 + \|u\|_{H^2} \qquad \forall u \in H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 1.$$

Übungsaufgabe 7.4 Sei $b \in C_0(\mathbb{R})$ und nehme an, dass $\eta \geqslant 1$ existiert mit

$$a := 1 + b \in [1/\eta, \eta].$$

Für $\overline{a} \in [1/\eta, \eta]$ sei $A_{\overline{a}} \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ definiert in **Übungsaufgabe 7.3**, bzw. sei der Operator $A \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ definiert durch

$$Au := au''.$$

Wir betrachten den stetigen Weg

$$[\tau \mapsto A(\tau)] : [0,1] \to \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})) \qquad \text{mit} \qquad A(\tau)u := \underbrace{((1-\tau)a + \tau)}_{:=a_\tau}u''.$$

Beweisen Sie, dass es zu jedem $\mu > 0$ ein $\varepsilon > 0$, eine endliche ε-Zerlegung der Eins $\{(\Pi_j, J_j)\}_{-N \leqslant j \leqslant N+1}$, und ein $K = K(\mu) > 0$ existieren derart dass

$$\|\Pi_j A(\tau)u - A_{a_\tau(x_j)}[\Pi_j u]\|_{L_2} \leqslant \mu\|\Pi_j u\|_{H^2} + K\|u\|_{H^1}, \qquad \forall u \in H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ |j| \leqslant N,\ \tau \in [0,1],$$

$$\|\Pi_{N+1} A(\tau)u - A_1[\Pi_{N+1} u]\|_{L_2} \leqslant \mu\|\Pi_{N+1} u\|_{H^2} + K\|u\|_{H^1}, \qquad \forall u \in H^2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \tau \in [0,1],$$

wobei wir $x_j \in J_j$ beliebig gewählt haben für $|j| \leqslant N$.