Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

8. Aufgabenblatt — 22.06.2017 / Abgabe 29.06.2017

Übungsaufgabe 8.1 Sei $b \in C_0(\mathbb{R})$ und nehme an, dass $\eta \geqslant 1$ existiert mit

$$a := 1 + b \in [1/\eta, \eta].$$

Zeigen Sie, dass der Operator $A \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ definiert durch

$$Au := au''$$

sektoriell ist.

(Hinweis: **Übungsaufgaben 7.2-7.4**.)

Übungsaufgabe 8.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathbb{E}$ ein Banachraum, und $f,\ g : I \to \mathbb{E}$ stetig. Für jedes $t \in \operatorname{int} I$ existiere außerdem

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = g(t).$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^1(I, \mathbb{E})$ mit $f'(t) = g(t)$ für alle $t \in I$.

Übungsaufgabe 8.3 Es seien $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ Banachräume, $\mathcal{O} \subset \mathbb{E}$ offen, und $f : \mathcal{O} \to \mathbb{F}$ sei ***Fréchet differenzierbar*** in $u_0 \in \mathcal{O}$, d.h. es existiert $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ mit

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u_0 + u) - f(u_0) - Au}{\|u\|} = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig in u_0;

(b) Ist $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ mit

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u_0 + u) - f(u_0) - Bu}{\|u\|} = 0.$$

so gilt $A = B$. Der Operator A heißt ***Fréchet Ableitung*** von f in u_0, und man schreibt $A = \partial F(u_0)$.

Übungsaufgabe 8.4 Es seien $(\mathbb{E}_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 0, 1$, $\mathbb{C}$-Banachräume mit $\mathbb{E}_1 \overset{d}{\hookrightarrow} \mathbb{E}_0$, $M > 0$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, und $A \in C([0,T], \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0))$ mit

(E1) $\Sigma_{\theta,0} \cup \{0\} \subset \rho(A(t))$ für alle $t \in [0,T]$;

(E2) $\|A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)} + \|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1)} + |\lambda|\, \|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0)} \leqslant M$ für alle $t \in [0,T]$ und $\lambda \in \Sigma_{\theta,0} \cup \{0\}$;

(E3) $M^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|A(t)x\|_0 \leqslant M\|x\|_1$ für alle $t \in [0,T]$ und $x \in \mathbb{E}_1$.

Beweisen Sie:

(a) $\|(\lambda - A(t))^{-1} - (\lambda - A(s))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0,\mathbb{E}_1)} \leqslant M^2 \|A(t) - A(s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1,\mathbb{E}_0)}$ für alle $t, s \in [0,T]$ und $\lambda \in \Sigma_{\theta,0} \cup \{0\}$.

(b) $|\lambda| \, \|(\lambda - A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_1)} \leqslant M^3$ für alle $t \in [0, T]$ und $\lambda \in \Sigma_{\theta,0} \cup \{0\}$.

(c) Sei $\lambda \in \Sigma_{\theta,0} \cup \{0\}$. Falls $A \in C^1([0, T], \mathcal{H}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_0))$, so gilt

$$(\lambda - A(\,\cdot\,))^{-1} \in C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1))$$

mit

$$\partial(\lambda - A(t))^{-1} = (\lambda - A(t))^{-1} \partial A(t) (\lambda - A(t))^{-1}, \qquad t \in [0, T].$$