Dr. Bogdan Matioc

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Sommersemester 2017

9. Aufgabenblatt — 29.06.2017 / Abgabe 06.07.2017

Übungsaufgabe 9.1 Es seien $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ $\mathbb{C}$-Banachräume und $T > 0$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei ferner

$$\mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha) := \Big\{k \in C(\Delta_T^0, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})) \, : \, \|k\|_\alpha := \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant T} |t - s|^\alpha \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} < \infty\Big\}$$

versehen mit Norm $\| \cdot \|_\alpha$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha), \| \cdot \|_\alpha)$ ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

(b) $\mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, 0) = BC(\Delta_T^0, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$;

(c) Für $\alpha > \beta$ gilt $\mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \beta) \hookrightarrow \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha)$ mit $\| \cdot \|_\alpha \leqslant T^{\alpha-\beta} \| \cdot \|_\beta$.

(d) Für $\alpha < 0$ hat jeder Kern $k \in \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha)$ eine stetige Erweiterung auf Δ_T mit $k(t, t) = 0$, $t \in [0, T]$, und $\mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha) \hookrightarrow C(\Delta_T, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$.

Übungsaufgabe 9.2 Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ $\mathbb{C}$-Banachräume, $k \in \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \alpha)$, $h \in \mathcal{K}_T(\mathbb{F}, \mathbb{G}, \beta)$ und α, $\beta < 1$. Zeigen Sie, dass der Kern

$$h * k(t, s) := \int_s^t \underbrace{h(t, \tau)k(\tau, s)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{G})} \, d\tau, \qquad (t, s) \in \Delta_T^0,$$

in $C(\Delta_T^0, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G}))$ liegt.
(Hinweis: Für $3 \leqslant N \in \mathbb{N}$ sei $\Delta_T^N := \{(t, s) \in \Delta_T \, : \, t - s \geqslant 3/N\}$ und $a_N : \Delta_T^N \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ definiert durch

$$a_N(t, s) := \int_{s+1/N}^{t-1/N} h(t, \tau)k(\tau, s) \, d\tau, \qquad (t, s) \in \Delta_T^N.$$

Zeigen Sie: $a_N \in C(\Delta_T^N, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G}))$ und $a_N \to_{N\to\infty} h * k$ in $C(\Delta_T^M, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G}))$ für $3 \leqslant M \in \mathbb{N}$.)

Übungsaufgabe 9.3 Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ $\mathbb{C}$-Banachräume. Ferner sei $c \in \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \mathbb{F}, \gamma)$, $b \in \mathcal{K}_T(\mathbb{F}, \mathbb{G}, \beta)$, und $a \in \mathcal{K}_T(\mathbb{G}, \mathbb{H}, \alpha)$, wobei α, β, $\gamma < 1$. Zeigen Sie, dass

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Übungsaufgabe 9.4 Sei Γ die Eulersche Gammafunktion und $k \in \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \alpha)$ mit $\alpha \in [0, 1)$. Zeigen Sie, dass $k * k * \ldots * k \in \mathcal{K}_T(\mathbb{E}, \alpha)$ und

$$\|\underbrace{k * k * \ldots * k}_{n \text{ mal}}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}(t, s) \leqslant \frac{[\Gamma(1 - \alpha)\|k\|_\alpha]^n}{\Gamma(n(1 - \alpha))}(t - s)^{n(1-\alpha)-1}$$

für alle $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant s < t \leqslant T$.
(Hinweis: Für $\operatorname{Re} x$, $\operatorname{Re} y > 0$ gilt $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$.)