1	2	Σ

Nichtstandard-Analysis – Blatt 1

Abgabe am 19.4.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $\mathbb{X}$ eine Menge und ${}^*\mathbb{X}$ eine nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$. Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \subset \mathbb{X}$, so ist ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.

(b) Sind $A, B \subset \mathbb{X}$, so gilt ${}^*A \subset {}^*B$ genau dann, wenn $A \subset B$ gilt.

(c) Hat $A \subset \mathbb{X}$ genau ein Element, so hat auch ${}^*A$ genau ein Element.
Hinweis: Betrachten Sie den Schnitt von $A \times A$ mit $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{X}\}$.

(d) Ist $A \subset \mathbb{X}^2$ beliebig und $B := \{(b, a) \mid (a, b) \in A\}$ die „Spiegelung“ von A, so ist auch ${}^*B$ die Spiegelung von ${}^*A$.
Hinweis: Drücken Sie zunächst die Menge $\{(b, a, b) \mid (a, b) \in A\}$ mit Hilfe von A, $\mathbb{X}$ und den Operationen aus Def. 1.1.1 aus.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

In dieser Aufgabe sind Formeln ϕ_i erster Stufe über $\mathbb{X} := \mathbb{N}$ gesucht mit den unten angegebenen Eigenschaften. (Wir verwenden die Konvention, dass 0 eine natürliche Zahl ist.) Dabei sollen aber keine Teilformeln der Form (ii) aus Definition 1.2.2 verwendet werden (d. h. „$(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in B$“), mit zwei Ausnahmen:
Sie dürfen „$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in A$“ und „$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in M$“ verwenden, wobei $A := \{(a, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ der Graph der Addition ist und $M := \{(a, b, a \cdot b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ der Graph der Multiplikation.

(„$\exists y \in \mathbb{X}$“ ist auch erlaubt.)

(a) Sind $x, y \in \mathbb{N}$, so ist $\phi_1(x, y)$ wahr genau dann, wenn $x < y$ ist.

(b) Ist $x \in \mathbb{N}$, so ist $\phi_2(x)$ wahr genau dann, wenn x prim ist.