Nichtstandard-Analysis – Blatt 10

Abgabe am 5.7.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Blatt sei $\mathbb{V}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ sei die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ und ${}^*\mathbb{X}$ sei eine echte nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $Z \subset {}^*[a, b]$ eine feine Zerlegung.

(a) Zeigen Sie, dass ${}^*f$ auf Z ein Maximum annimmt.

(b) Folgern Sie aus (a) (unter Verwendung der Charakterisierung der Stetigkeit einer Funktion f aus der Vorlesung), dass f auf $[a, b]$ ein Maximum annimmt.

Von jetzt an nehmen wir an, dass ${}^*\mathbb{X}$ eine **Vergrößerung** von $\mathbb{X}$ ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

(a) Sei $Y \subset {}^*\mathbb{R}$ eine hyperendliche Menge mit $\mathbb{R} \subset Y$. Zeigen Sie: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathrm{mon}(r) \cap Y$ unendlich.
Hinweis: Was lässt sich über die kleinsten Elemente von $\{y \in Y \mid y > r\}$ aussagen, unter Verwendung, dass Y hyperendlich ist?

(b) Gibt es ein hyperendliches Y wie in (a) (also mit $\mathbb{R} \subset Y \subset {}^*\mathbb{R}$), bei dem „alle Punkte gleiche Abstände haben“, also von der Form $Y = \{\frac{i}{b} \mid i \in {}^*\mathbb{Z}, -a \leq i \leq a\}$ für geeignete $a, b \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$?
Hinweis: Fangen Sie damit an, Y dieser Form zu suchen, die kleine (vorgegebene) endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthalten.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathbb{V}_\ell$ mit der Eigenschaft, dass je endlich viele Mengen aus $\mathcal{A}$ nicht-leeren Schnitt haben.
Zeigen Sie, dass dann der Schnitt $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} {}^*A$ nicht leer ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine hyperendliche Menge, die $\mathcal{A}$ enthält.

(b) Zeigen Sie: Zu jeder (völlig beliebigen) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es eine interne Funktion $g : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, die f fortsetzt (also $g(x) = f(x)$ falls $x \in \mathbb{R}$) und stetig ist (also $\forall \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0} : \dots$).
Hinweis: Betrachten Sie für jede endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ die Menge der stetigen Funktionen, die auf E mit f übereinstimmen.