Nichtstandard-Analysis – Blatt 11

Abgabe am 12.7.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Blatt sei $\mathbb{V}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ sei die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ und ${}^*\mathbb{X}$ sei eine Vergrößerung von $\mathbb{X}$. Außerdem seien $X, Y \subset \mathbb{V}_0$ topologische Räume, und wir fassen ${}^*X$ und ${}^*Y$ wie in der Vorlesung auch als topologischen Raum auf.

Aufgabe 1 (1 Punkte):

Geben Sie ein Kriterium dafür, ob ein Punkt $x \in X$ isoliert ist, unter Verwendung von $\mathrm{mon}(x)$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Zeigen Sie Lemma 3.2.7: X ist Hausdorff genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt: $\mathrm{mon}(x) \cap \mathrm{mon}(y) = \emptyset$.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum X ist ein T_3-Raum, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ existieren mit $A \subset U_1$ und $x \in U_2$.

Zeigen Sie: Ist X ein T_3-Raum, so ist für jedes $x \in X$ die Monade $\mathrm{mon}(x)$ abgeschlossen in ${}^*X$.

Bonus-Aufgabe (noch zwei Punkte): Gilt auch die Rückrichtung?

Aufgabe 4 (1+2 Punkte):

Zeigen Sie, unter Verwendung der nichtstandard-Analysis-Kriterien für stetig, abgeschlossen, kompakt und hausdorff:

(a) Abgeschlossene Teilmengen von kompakten topologischen Räumen sind kompakt.

(b) Ist X kompakt, Y hausdorff und $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist auch $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig.