1	2	3	Σ

Nichtstandard-Analysis – Blatt 2

Abgabe am 26.4.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1 Punkte):

Seien $f, g, h\colon \mathbb{X}^2 \to \mathbb{X}$ Funktionen und $a, b \in \mathbb{X}$. Drücken Sie

$$f(g(x, y), a) = h(z, b)$$

als Formel aus, unter Verwendung von Definition 1.2.2 und der Ausdrücke, von denen wir bereits gesehen haben, dass sie als Formeln ausdrückbar sind (1.2.7, 1.2.11, 1.2.14).

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $\mathbb{X}$ eine Menge und ${}^*\mathbb{X}$ eine nichtstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$. Seien $A, B \subset \mathbb{X}$ und sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist $A' \subset A$, so ist ${}^*f({}^*A') = {}^*(f(A'))$.

(b) f ist konstant genau dann, wenn ${}^*f$ konstant ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Sei ${}^*\mathbb{R}$ eine nichtstandard-Erweiterung von $\mathbb{R}$. Sei $R := \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a < b\}$. Für $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ definieren wir: $a \,{}^*\!< b :\Longleftrightarrow (a, b) \in {}^*R$. Zeigen Sie:

(a) ${}^*\!<$ ist eine Ordnungsrelation auf ${}^*\mathbb{R}$.[1]

(b) Diese Ordnungsrelation setzt $<$ fort (wenn man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ auffasst[2]).

(c) Definieren wir ${}^*\!\leq$ aus $\leq$ analog zur Definition von ${}^*\!<$ aus $<$, so gilt für $a, b \in {}^*\mathbb{R}$: $a \,{}^*\!\leq b$ genau dann, wenn $a = b$ oder $a \,{}^*\!< b$.

(d) Für $A \subset \mathbb{R}$ gilt: A ist in $\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt genau dann, wenn ${}^*A$ in ${}^*\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist. („In ${}^*\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt" heißt: Es gibt kein $r \in {}^*\mathbb{R}$, so dass alle Elemente von ${}^*A$ kleiner als r sind.)

(e) Für jedes $a \in {}^*\mathbb{R}$ gibt es genau ein $n \in {}^*\mathbb{Z}$ mit $n \,{}^*\!\leq a \,{}^*\!< n \,{}^*\!+ 1$.
(Hierbei ist ${}^*\!+$ wie üblich aus $+$ definiert, d. h. $\{(a, b, a \,{}^*\!+ b) \mid a, b \in {}^*\mathbb{R}\} = {}^*\{(a, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.)

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/NSA_SS18/

[1] Nachtrag: Gemeint ist „strenge Totalordnung", d. h. transitiv, und für alle a, b gilt genau eins von: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

[2] Nachtrag: Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ auf indem wir $a \in \mathbb{R}$ mit ${}^*a \in {}^*\mathbb{R}$ identifizieren.