1	2	3	Σ

Nichtstandard-Analysis – Blatt 3

Abgabe am 3.5.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Aufgabenblatt sei ${}^*\mathbb{N}$ eine echte („proper“) nichtstandard-Erweiterung von $\mathbb{N}$. Wir fassen $\mathbb{N}$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{N}$ auf, und die Ordnungsrelation ${}^*\!<$ auf ${}^*\mathbb{N}$ bezeichnen wir einfach mit $<$.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $m \in \mathbb{N}$ und $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, so ist $n > m$.

Hinweis: Betrachten Sie ${}^*\{a \in \mathbb{N} \mid a < m\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei jetzt $A \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist unendlich.

(b) ${}^*A$ ist unendlich.

(c) ${}^*A \setminus A \neq \emptyset$

(d) ${}^*A \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$

(e) ${}^*A$ enthält (mindestens) ein Element, dass größer als jede natürliche Zahl ist.

(f) Zu jedem Element $n \in {}^*\mathbb{N}$ gibt es ein $a \in {}^*A$ mit $a > n$.

Anmerkung: Bei den meisten Implikationen reichen ganz kurze Begründungen der Form „folgt aus xxx“.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Menge ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ kein kleinstes Element besitzt.

Hinweis: Es ist nützlich, das Transferprinzip auf eine geeignete Aussage über $\mathbb{N}$ anzuwenden.