Nichtstandard-Analysis – Blatt 4

Abgabe am 9.5.2018 in der Übung (15:30 Uhr)

....
Name und Matr-Nr.

1	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte):

Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen.

(a) Zeigen Sie: Ist μ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, so gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$, so dass für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mu(\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}) = 1.$$

Dieses b bezeichnet man auch mit $\lim_\mu a_i$.

(b) Sei weiterhin μ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und $b = \lim_\mu a_i$. Wir betrachten nun die Ultrapotenz ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^\mathbb{N}/\mu$ und $c := [a_i]_i \in {}^*\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $|c - b| < \epsilon$.

(c) Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt: b ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn es einen freien Ultrafilter μ auf $\mathbb{N}$ gibt mit $\lim_\mu a_i = b$.