

1	2	3	Σ

.....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und ist $b \in \mathbb{R}$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ genau dann, wenn für alle $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ gilt: $a_n \simeq b$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $I \subset \mathbb{R}^k$ beliebig und sei, für $i \in I$, $X_i \subset \mathbb{R}$.

Aus einer solchen Familie von Mengen kann man eine Nonstandard-Version der Familie konstruieren:

Wir setzen $Y := \{(i, x) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid i \in I, x \in X_i\}$ und definieren dann, für $i \in {}^*I$: ${}^*X_i := \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid (i, x) \in {}^*Y\}$.

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $i \in {}^*I$ gilt: Ist *X_i nicht-leer und nach oben durch ein Element von ${}^*\mathbb{R}$ beschränkt, so hat *X_i ein Supremum in ${}^*\mathbb{R}$.
- (b) Geben Sie eine beschränkte Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ an, die kein Supremum in ${}^*\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei ${}^*\mathbb{X}$ eine echte nonstandard-Erweiterung von \mathbb{X} und seien $A_i \subset \mathbb{X}^k$ Teilmengen (für $i \in \mathbb{N}$) mit $A_0 \supset A_1 \supset \dots$. Wir nehmen $\mathbb{N} \subset \mathbb{X}$ an und definieren *A_i , für $i \in {}^*\mathbb{N}$ genauso wie in Aufgabe 2.

Zeigen Sie:

- (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n = \bigcup_{n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} {}^*A_n$
- (b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
 - (i) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = \emptyset$.
 - (ii) Die Menge aus Teil (a) ist leer.
 - (iii) Für alle $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ gilt ${}^*A_n = \emptyset$.
 - (iv) Es gibt ein $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ mit ${}^*A_n = \emptyset$.

Anmerkung: Bei den meisten Implikationen dürfen Sie einfach „trivial“ schreiben.

Noch eine Anmerkung: Für die Richtung „ \subset “ von (a) muss man ein bisschen knobeln. Es gibt einen Hinweis unter http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/NSA_SS18/Uebungen/hinweis5.pdf.